Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

Στέλιος Μιχαήλογλου

www.askisopolis.gr

Το φυλλάδιο αυτό δημιουργήθηκε για να χρησιμοποιηθεί ως επέκταση του σχολικού βιβλίου και όχι αυτόνομα.

δ΄ έκδοση

20-12-2016

Συστήματα

Γραμμικές Εξισώσεις

Κάθε εξίσωση **1ου βαθμού** με **2 αγνώστους** ονομάζεται **γραμμική**.
Η γενική της μορφή είναι $\alpha x+\beta y=\gamma,\ \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ και παριστάνει μια ευθεία γραμμή.

Σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $\alpha x+\beta y=\gamma$ και $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα 2 x 2 και γράφουμε $\begin{cases}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{cases}$.

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση** του συστήματος.

Επίλυση Γραμμικού Συστήματος 2x2

Γραφική επίλυση

Σχεδιάζουμε τις ευθείες που αντιπροσωπεύουν οι εξισώσεις του συστήματος. Αν:

- οι δύο ευθείες τέμνονται, τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** (x_0, y_0),που είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών.
- οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**, αφού δεν υπάρχει κοινό σημείο του οποίου οι συντεταγμένες να είναι λύση του συστήματος.
- οι ευθείες ταυτίζονται, τότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**, αφού υπάρχουν άπειρα κοινά σημεία στις δύο ευθείες.

Μέθοδος της Αντικατάστασης

Λύνουμε μία από τις 2 εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην 2η εξίσωση. Έτσι προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο.

Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές σε κάποιον άγνωστο. Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις 2 εξισώσεις κατά μέλη και προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο.

Λύση γραμμικού συστήματος 2x2 με ορίζουσες

Έστω το γραμμικό σύστημα 2x2: $\begin{cases}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{cases}$.

Ορίζουσα D του συστήματος ονομάζεται η παράσταση $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix}=\alpha\cdot\beta'-\alpha'\cdot\beta$

Την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν στη θέση των συντελεστών του x θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με: $D_x=\begin{vmatrix}\gamma & \beta\\ \gamma' & \beta'\end{vmatrix}=\gamma\cdot\beta'-\gamma'\cdot\beta$.

Ομοίως, την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν στη θέση των συντελεστών του y θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με: $D_y=\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \alpha' & \gamma'\end{vmatrix}=\alpha\cdot\gamma'-\alpha'\cdot\gamma$.

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y), όπου $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν $D = 0$, το σύστημα θα είναι αδύνατο ή θα έχει άπειρες λύσεις.

Γραμμικό σύστημα 3x3

Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους x,y,z $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$ και θέλουμε να βρούμε τις κοινές τους λύσεις τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 3x3.**
Η πιο συνηθισμένη μέθοδος επίλυσης ενός τέτοιου συστήματος είναι η μέθοδος αντικατάστασης. Λύνουμε τη μία από τις τρεις εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στις δύο άλλες εξισώσεις. Έτσι οι δύο τελευταίες εξισώσεις μετατρέπονται σε γραμμικό σύστημα 2x2, το οποίο το λύνουμε με έναν από τους προηγούμενους τρόπους. Αφού προσδιορίσουμε τους δύο αγνώστους αντικαθιστούμε τις τιμές τους στην πρώτη εξίσωση απ' όπου υπολογίζουμε την τιμή και του τρίτου αγνώστου.

Ασκήσεις

1. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ με όλες τις μεθόδους επίλυσης συστήματος.

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 2x + 7y = -3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 5x - 12y = -9 \\ 6x + y = 20 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2x + 9y = 4 \\ 6x + 27y = 16 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 14x + 7y = 7 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{7} \\ 3x + y = 24 \end{cases}$ **ζ)** $\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 5 \\ 5\sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y = 1 \end{cases}$ **η)** $\begin{cases} \sqrt{14}x + 2y = 28 \\ 7x + \sqrt{14}y = 14\sqrt{14} \end{cases}$

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β, αν γνωρίζετε ότι τα ζεύγη (1,1) και (- 1, 5) είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x + \beta y - 9 = 0$.

4. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα: **α)** $\begin{cases} 2|x| - 3|y| = 2 \\ |x| + 2|y| = 8 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 7 \end{cases}$

5. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 10x - 2y = \lambda - 1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + y = 2\lambda - 1 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \alpha x + 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + \lambda^2 y = 1 - \lambda \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} x + (5\lambda - 4)y = \lambda \\ (2\lambda + 1)x + (\lambda - 4)y = 2\lambda \end{cases}$

6. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ, να βρείτε τα κοινά σημεία των ευθειών:

α) $\varepsilon_1 : \lambda x + 2y = \lambda + 2$ και $\varepsilon_2 : (2\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y = 2(\lambda + 1)$

β) $\varepsilon_1 : (\lambda + 2)x + 4y = 8 - 3\lambda$ και $\varepsilon_2 : 2x + (\lambda + 4)y = 8$

7. Δίνονται τα συστήματα: $\Sigma_1 : \begin{cases} (\alpha + 1)x - \beta y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ και $\Sigma_2 : \begin{cases} x + (\beta + 2)y = \alpha^2 + 1 \\ x - (\alpha - 1)y = \beta^3 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι αν το πρώτο έχει άπειρες λύσεις, τότε το δεύτερο είναι αδύνατο.

8. Για ποιες τιμές των $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ τα συστήματα:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y = \beta \\ 8x + \alpha y = \alpha + \beta + 1 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} 2x + (\alpha+\beta)y = 5 \\ 3x + 9y = \beta - 2 \end{cases}$$ είναι συγχρόνως αδύνατα;

9. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x - 3y = 11 - \lambda \\ x + 5y - \lambda = 7 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση .

γ) Για ποια τιμή του λ η λύση (x, y) που βρήκατε στο (β) επαληθεύει τη σχέση: $x + y = \dfrac{59}{13}$

10. Για ποια τιμή του λ, το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ \lambda x + 3y = 5 \end{cases}$ έχει λύση η οποία επαληθεύει την εξίσωση $x + 5y = 17$;

11. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $\begin{cases} D_x + D_y = D \\ D_x - D_y = 3D \end{cases}$. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.

12. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2χ2 με αγνώστους x,y, για τις ορίζουσες του D, D_x, D_y ισχύουν οι σχέσεις: $\begin{cases} 2D_x + D_y = -2D \\ D_x - 3D_y = -15D \end{cases}$. Να βρείτε τη λύση του συστήματος, αν γνωρίζετε ότι είναι μοναδική.

13. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $D_x^2 + D_y^2 = 2D_xD_y$ και $D \neq 0$. Αν $x + y = 6$, να βρεθούν τα x, y.

14. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$

α) Να αποδείξετε ότι: $(D-2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$. **β)** Να βρείτε τη λύση του συστήματος.

15. Να λύσετε γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους χ,y και ορίζουσες D, D_x, D_y για τις οποίες ισχύει: $D_x^2 + D_y^2 + D^2 - 12D_x + 8D_y - 4D + 56 = 0$.

16. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y, για τις ορίζουσες του D, D_x, D_y ισχύει η σχέση: $2D_x^2 - 2D_xD_y + D_y^2 = 0$. Να βρείτε τη λύση του συστήματος, αν γνωρίζετε ότι είναι μοναδική.

17. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 48 cm. Αν αυξήσουμε συγχρόνως τη μία πλευρά κατά 5 cm και την άλλη κατά 1 cm, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 65 cm^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

18. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 14. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του παίρνουμε αριθμό κατά 18 μικρότερο. Να βρείτε τον αριθμό.

19. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y+\omega=1 \\ 2x+y-\omega=6 \\ x-y+2\omega=-5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x-y-\omega=-1 \\ x+2y-\omega=8 \\ 3x-y+2\omega=3 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2x+y+\omega=1 \\ 4x-y+\omega=-5 \\ -x+y+2\omega=5 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x-3y+6\omega=2 \\ x-5y+3\omega=3 \\ x-3y+6\omega=1 \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} 3x-4y+\omega=0 \\ -x+3y-2\omega=5 \\ x-y=4 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} 2x-y-3\omega=0 \\ x+2y-4\omega=0 \\ 8x-4y-12\omega=0 \end{cases}$

20. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x-3y=-8 \\ 2y-\omega=10 \\ 4\omega+3x=-13 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}-\dfrac{4}{\omega}=0 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{\omega}=4 \\ \dfrac{3}{y}+\dfrac{1}{\omega}=-2 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x+y=6 \\ y+\omega=-4 \\ \omega+x=18 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\omega}=0 \\ \dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

21. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,8)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,5)$.

Μη Γραμμικά Συστήματα

22. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

α) $\begin{cases} 2x^2-y=0 \\ 6x-y=4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x-y=0 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=42 \\ x^2-y^2+x-y=18 \end{cases}$

23. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η ευθεία $y=4x-\lambda$ τέμνει την παραβολή $y=x^2$.

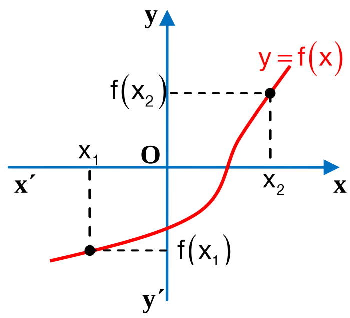
Ιδιότητες συναρτήσεων

Μονοτονία

- Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ΄ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $\mathbf{x_1,x_2\in\Delta}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$ είναι

$$\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$$

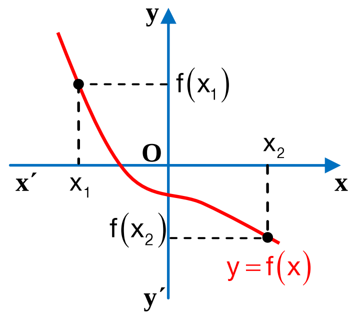
Συμβολισμός: Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, γράφουμε: $f \nearrow \Delta$



- Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ΄ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $\mathbf{x_1,x_2\in\Delta}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$ είναι

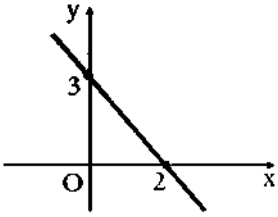
$$\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$$

Συμβολισμός: Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, γράφουμε: $f \searrow \Delta$

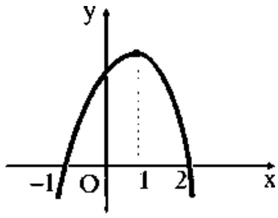


Ασκήσεις

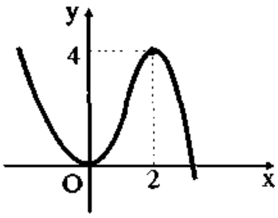
24. Με τη βοήθεια των γραφικών τους παραστάσεων να γράψετε τα διαστήματα στα οποία κάθε συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα ή σταθερή



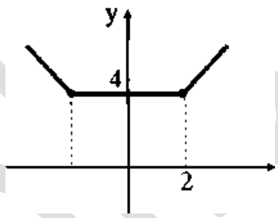
$f(x)=-\frac{3}{2}x+3$



$g(x)=-x^2+x+2$



$h(x)=-x^3+3x^2$



t(x) = |x-2|+2

25. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις

α) $f(x)=\sqrt{x}$ **β)** $f(x)=2+\sqrt{5-x}$ **γ)** $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$ **δ)** $f(x)=\frac{1}{x+1}-\sqrt{x+1}$

26. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R να λύσετε τις ανισώσεις.

α) $f(x)<f(3)$ **β)** $f(3x-1)>f(x-5)$ **γ)** $f(|x|)-f(5)<0$ **δ)** $f(x^2)>f(1)$

27. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $f(3x+2)<f(x-4)$ **β)** $f(x-1)>f(3)$ **γ)** $f(x-2)-f(2x-3)<0$

28. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η C_f τέμνει τον άξονα x 'x στο 3 να λύσετε τις ανισώσεις.

α) $f(x)>0$ **β)** $f(x)\le 0$ **γ)** $f(|x-1|)<0$ **δ)** $f(x^2)>0$

29. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $f(x)=f(1)$ **β)** $f(x^2)=f(2x-1)$ **γ)** $f(2|x|)=f(|x|+1)$ **δ)** $f(x^2)-f(4)=0$

30. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο R και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-1,5)$. Να λύσετε την ανίσωση $f(x-1)<3$.

31. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο R. Αν $f(1)<f(2)$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ να λύσετε την ανίσωση $f(|x+3|)>2$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3+x-5, x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. **β)** Να λύσετε την ανίσωση $f(x-3)>0$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{1821}+2x+4, x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. **β)** Να λύσετε την ανίσωση $f(x+2)<7$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2016-x-x^5$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. **β)** Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2)<2016$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=8-x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. **β)** Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)-8)<8$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. **β)** Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x))>7$.

Θεωρητικές ασκήσεις

37. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Α να δείξετε ότι η $g(x)=-f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

38. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)>0$, για κάθε $x\in A$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

39. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Α και η g γνησίως φθίνουσα στο Α να δείξετε ότι η $h(x)=f(x)-g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

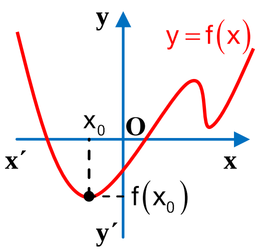
40. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)<0,\ g(x)>0$ να δείξετε ότι η $h(x)=f(x)g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Ακρότατα

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0\in A$, όταν:

$$\mathbf{f(x)\geq f(x_0)}\quad \textbf{για κάθε } \mathbf{x\in A}$$

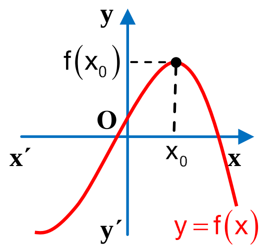
Το x_0 λέγεται θέση ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο ή απλά ελάχιστο της f και το συμβολίζουμε με $\min f(x)$.



Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0\in A$, όταν:

$$\mathbf{f(x)\leq f(x_0)}\quad \textbf{για κάθε } \mathbf{x\in A}$$

Το x_0 λέγεται θέση μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό μέγιστο ή απλά μέγιστο της f και το συμβολίζουμε με $\max f(x)$.



Ασκήσεις

41. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x)=3x^2+2$ **β)** $f(x)=x^{2016}-1$ **γ)** $f(x)=4(x-1)^2-3$ **δ)** $f(x)=x^{2012}+(x^2-x)^2+1$

42. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2-2x+10$ **β)** $g(x)=\dfrac{3}{x^{2012}+3}$ **γ)** $h(x)=|x-1|-4$

δ) $f(x) = -x + 2\sqrt{x} - 1$ **ε)** $f(x) = \dfrac{2}{|x|+1}$ **στ)** $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$

43. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 4$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(3) = -5$.

β) Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$.

44. Αν η συνάρτηση $f(x) = 3x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[2,5]$, να βρείτε τα ακρότατα της.

Άρτιες – Περιττές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $\mathbf{x \in A}$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

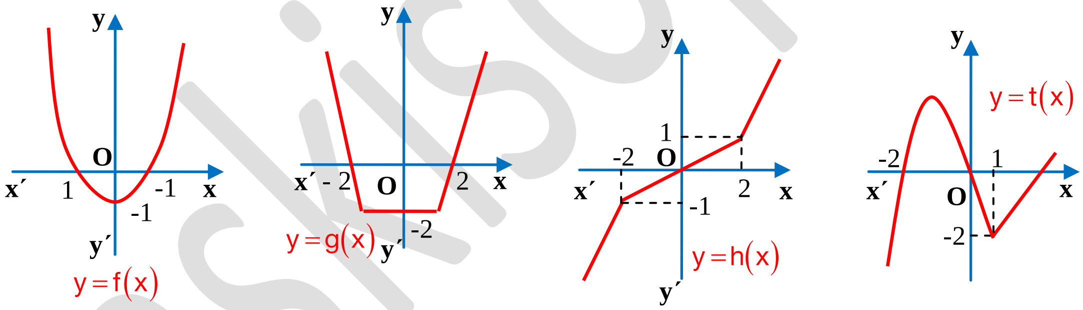
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $\mathbf{x \in A}$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.

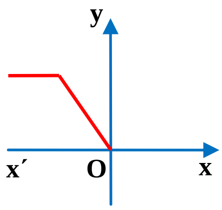
Ασκήσεις

45. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.



46. Να συμπληρώσετε την διπλανή γραμμή ώστε να παριστάνει γραφική παράσταση:

i. άρτιας συνάρτησης ii. περιττής συνάρτησης



47. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές:

α) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ **β)** $g(x) = x^5 - 2x^3 + 4x$ **γ)** $h(x) = \dfrac{x^2}{|x|-1}$

δ) $t(x) = \dfrac{3x}{x-5}$ **ε)** $\varphi(x) = x^4 - 5x^3 + x - 4$ **στ)** $\sigma(x) = \sqrt{9-x^2}$

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{5-\sqrt{x^2-1}}{|x|-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **β)** Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

49. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,\ \lambda)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε το λ.

50. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι άρτια και τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A(-2,0)$, $B(1,0)$, να δείξετε ότι $4f(1)-3f(-1)+2f(2)+9f(-2)=0$

51. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ για το οποίο η συνάρτηση $f:(\lambda-4,\lambda)\to\mathbb{R}$ είναι άρτια.

52. Αν η συνάρτηση $f:(\lambda,3)\to\mathbb{R}$ είναι περιττή, να λύσετε την εξίσωση $f(2)+f(-2)+x=\lambda$.

53. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ για το οποίο η συνάρτηση $f(x)=x^2-\lambda x+3$ είναι άρτια.

Θεωρητικές ασκήσεις

54. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)$ είναι άρτια.

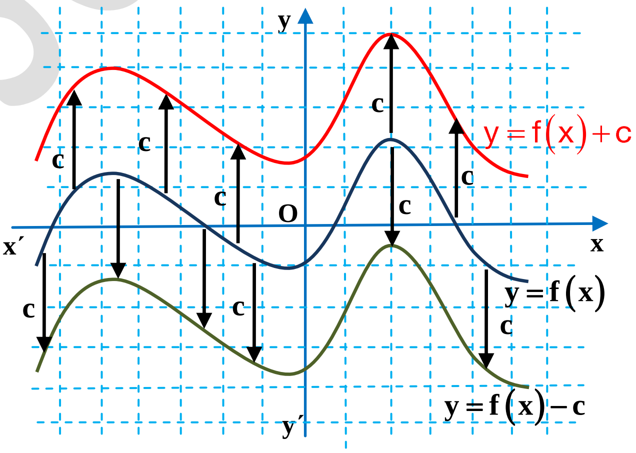
55. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το A και είναι περιττές να δείξετε ότι η συνάρτηση:
α) $h(x)=f(x)+g(x)$ είναι περιττή **β)** $\varphi(x)=f(x)g(x)$ είναι άρτια.

56. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
α) η συνάρτηση $g(x)=f(1-x)+f(1+x)$ είναι άρτια.
β) η συνάρτηση $h(x)=f(1-x)-f(1+x)$ είναι περιττή.

Κατακόρυφη & Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

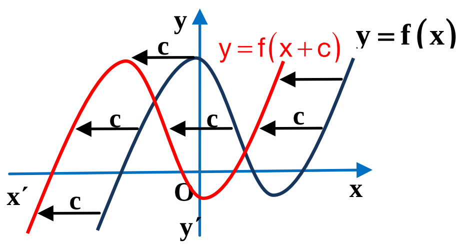
Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{g(x)=f(x)+c}$, $\mathbf{c>0}$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες προς τα πάνω και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{h(x)=f(x)-c}$, $\mathbf{c>0}$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες προς τα κάτω.

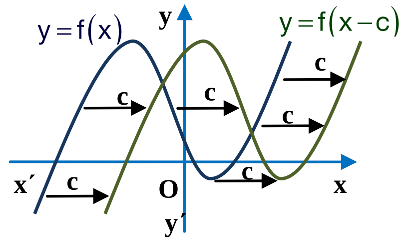


Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{g(x)=f(x+c)}$, $\mathbf{c>0}$, προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά c μονάδες προς τα αριστερά.



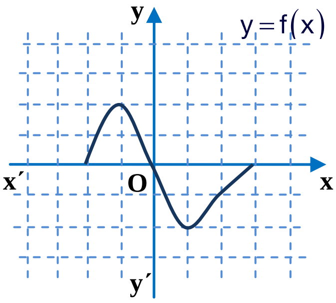
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{h(x)=f(x-c)}$, $\mathbf{c>0}$, προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής



παράστασης της συνάρτησης f κατά c
μονάδες προς τα δεξιά.

Ασκήσεις

57. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

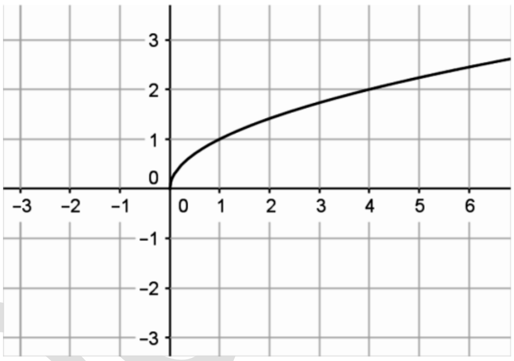


α) $g(x)=f(x)+1$ και $h(x)=f(x)-1$

β) $g(x)=f(x-2)$ και $h(x)=f(x+2)$

γ) $g(x)=f(x-2)+1$ και $h(x)=f(x+2)-1$

58. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $f(x)=\sqrt{x}$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

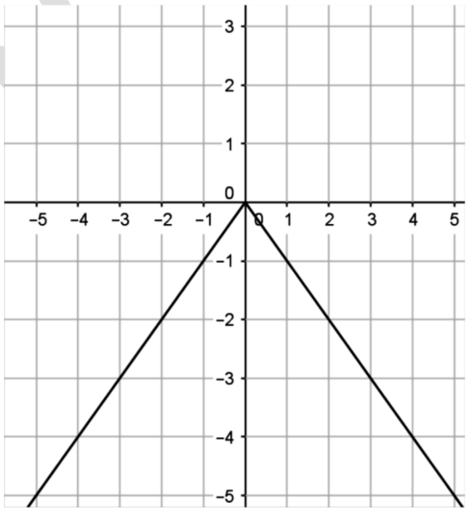


α) $g_1(x)=\sqrt{x}+3$, $g_2(x)=\sqrt{x}-1$

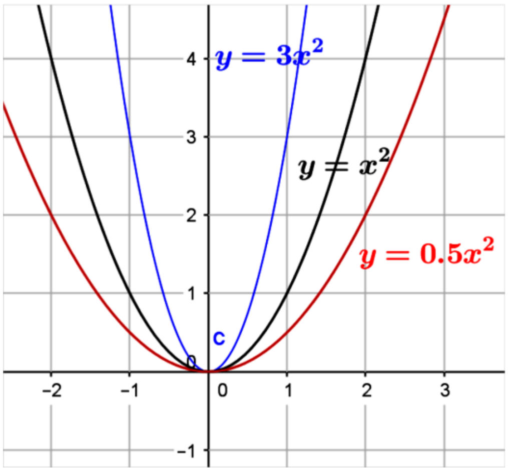
β) $h_1(x)=\sqrt{x-2}$ και $h_2(x)=\sqrt{x+4}$

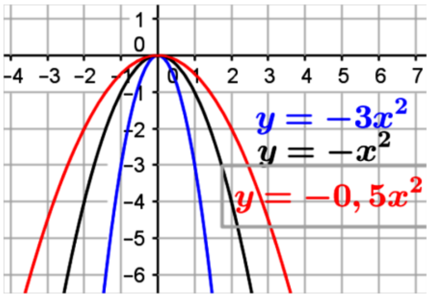
γ) $\varphi_1(x)=\sqrt{x-2}-1$ και $\varphi_2(x)=\sqrt{x+4}+3$

59. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $f(x)=-|x|$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=3-|x|, h(x)=-|x+2|$ και $\varphi(x)=3-|x+2|$.



Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$



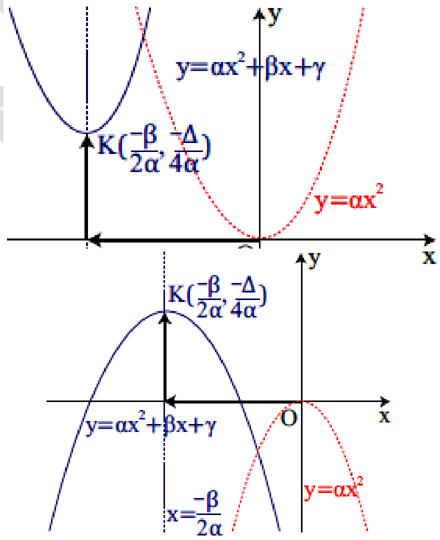


- ✓ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$ λέγεται παραβολή με κορυφή το Ο και άξονα συμμετρίας τον y΄y.
- ✓ Αν $\alpha > 0$ η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα πάνω, ενώ αν $\alpha < 0$ είναι ανοιχτή προς τα κάτω.
- ✓ Καθώς το $|\alpha|$ μεγαλώνει, η παραβολή κλείνει και πλησιάζει τον y΄y.

Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Επειδή $\mathbf{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}}$, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $\mathbf{y = x^2}$. Μιας οριζόντιας κατά $\frac{\beta}{2\alpha}$ και μιας κατακόρυφης κατά $\frac{\Delta}{4\alpha}$. Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο $\mathbf{K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)}$

και άξονα συμμετρίας την ευθεία $\mathbf{x = -\frac{\beta}{2\alpha}}$.



Ασκήσεις

60. Να παραστήσετε γραφικά της συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = x^2 + 1$ **β)** $f(x) = x^2 - 4$ και $g(x) = x^2 + 4$

γ) $f(x) = (x-1)^2$ και $g(x) = (x+1)^2$ **δ)** $f(x) = 3(x+2)^2$ και $g(x) = 3(x-2)^2$

ε) $f(x) = (x-2)^2 + 1$ και $g(x) = (x-2)^2 - 1$

στ) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ και $g(x) = 2(x-1)^2 - 3$

61. Να παραστήσετε γραφικά της συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ **β)** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ **γ)** $f(x) = x^2 - x - 2$

δ) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ **ε)** $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ **στ)** $f(x) = -x^2 + 2x$

62. Να παραστήσετε γραφικά της συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^2-2x+1$ **β)** $f(x)=x^2-4x+4$ **γ)** $f(x)=-x^2+6x-9$

δ) $f(x)=-x^2+x-6$ **ε)** $f(x)=x^2+3x+4$ **στ)** $f(x)=x^2-2x+3$

Επαναληπτικές ασκήσεις

63. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

64. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^{2016}+1\right)<0$.
δ) Να βρείτε τη τιμή της παράστασης $A=f(1821)-45f(-1453)+f(-1821)-45f(1453)$

65. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
β) Αφού αποδείξετε ότι $|f(x)|\leq 1$, να βρείτε τα ακρότατα και τις θέσεις ακροτάτων της f.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x-2)+f\left(x^2-3x+1\right)\geq 2$.

66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\lambda x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda=1$.
β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2-x$.
ε) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
στ) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

i. $f(x)<2$ **ii.** $x^3+x-10>0$ **iii.** $\left(x^2+x\right)^3+x^2+x=10$

67. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα [β,α] ∪ [2,8] και είναι περιττή. Η μελέτη της στο διάστημα [2,8] έδωσε το διπλανό πίνακα.

Αν $f(2)=3, f(4)=1$ και $f(8)=10$:

x	β	α	2	4	8
$f(x)$				↘	↗

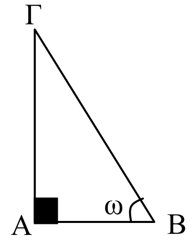
α) Να βρείτε τα α,β.

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα για όλο το πεδίο ορισμού.
γ) Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση.
δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών.
ε) Να εξετάσετε αν η f έχει ακρότατα.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου

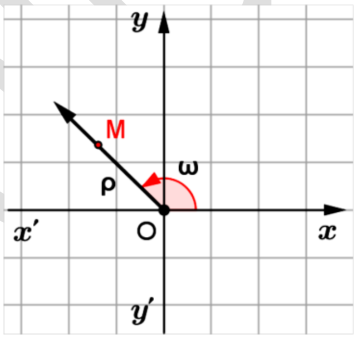


Αν ω οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε από το Γυμνάσιο γνωρίζουμε ότι:

$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$, $συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ και

$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \le ω \le 360^\circ$

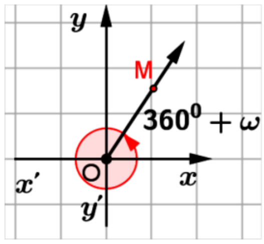


Επίσης στο Γυμνάσιο γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας ω με $0^\circ \le ω \le 360^\circ$.
Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy θεωρούμε την ημιευθεία Ot και τη γωνία ω που παράγεται από τη περιστροφή της Οχ κατά τη θετική φορά (αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού) έως ότου συμπέσει με την Ot. Έστω M(x,y) σημείο της τελικής πλευράς Ot της γωνίας ω, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση ρ από την αρχή O των αξόνων. Είναι $(OM) = ρ = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Ορίζουμε τους παρακάτω αριθμούς:

$ημω = \frac{y}{ρ}$, $συνω = \frac{x}{ρ}$, $εφω = \frac{y}{x}$ και $σφω = \frac{x}{y}$,

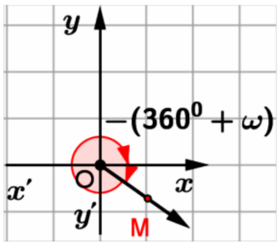
τους οποίους ονομάζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας ω.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας μεγαλύτερης από 360°.



Αν ο ημιάξονας Ox κάνει μια πλήρη περιστροφή κατά τη θετική φορά και διαγράψει επιπλέον μια γωνία ω, τότε η συνολική γωνία είναι $360^\circ + ω$ και έχει την ίδια τελική πλευρά με την γωνία ω, οπότε οποιοιδήποτε σημείο της τελικής πλευράς αν χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και $360^\circ + ω$ θα προκύψουν τα ίδια αποτελέσματα και για τις δύο γωνίες.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αρνητικών γωνιών



Αν τώρα ο ημιάξονας Ox , στραφεί γύρω από το O κατά την αρνητική φορά, πραγματοποιήσει μια πλήρη περιστροφή και στη συνέχεια διαγράψει γωνία ω τότε συνολικά θα έχει διαγράψει γωνία $-360^\circ - ω$ ή $-(360^\circ + ω)$.Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των αρνητικών γωνιών ορίζονται όπως και των γωνιών από 0° ως 360°. Δηλαδή

$ημω = \frac{y}{ρ}$, $συνω = \frac{x}{ρ}$, $εφω = \frac{y}{x}$ και $σφω = \frac{x}{y}$, $ρ = \sqrt{x^2 + y^2}$

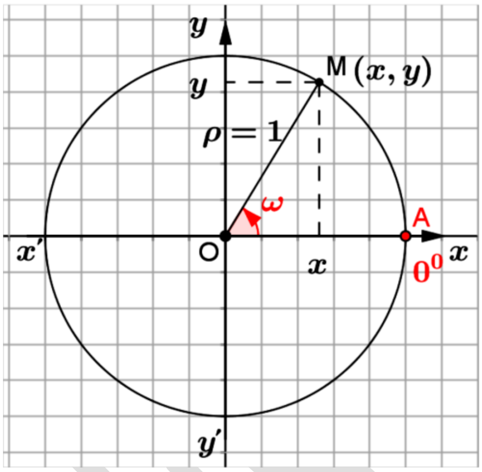
Γενικά οι γωνίες $κ \cdot 360^\circ + ω, κ \in \mathbb{Z}$ και ω έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή:

$$\mathbf{ημ(κ \cdot 360^\circ + ω) = ημω} \qquad \mathbf{συν(κ \cdot 360^\circ + ω) = συνω}$$

$$\mathbf{εφ(κ \cdot 360^\circ + ω) = εφω} \qquad \mathbf{σφ(κ \cdot 360^\circ + ω) = σφω}$$

Τριγωνομετρικός κύκλος

Για να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, χρησιμοποιούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο. Είναι ο κύκλος που έχει το κέντρο του στην αρχή Ο των αξόνων, ακτίνα ρ = 1 και στον οποίο έχει ορισθεί ως αρχή μέτρησης των τόξων και των γωνιών, το σημείο Α που τέμνει ο κύκλος τον θετικό ημιάξονα Οx.



Έστω μια γωνία ω και $M(x, y)$ το σημείο τομής της τελικής της πλευράς με το τριγωνομετρικό κύκλο. Τότε για τη γωνία ω ισχύει:

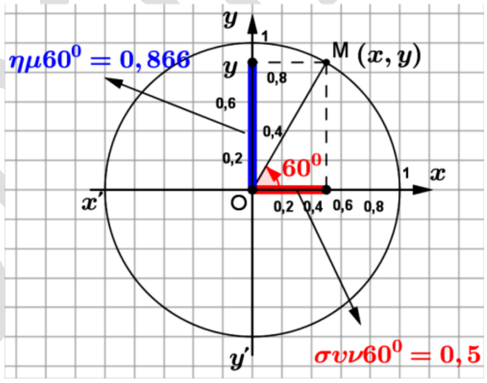
$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{1} = y$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x$, δηλαδή

$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega = x =}$ **τετμημένη του M** και

$\boldsymbol{\eta\mu\omega = y =}$ **τεταγμένη του M**

Για το λόγο αυτό ο άξονας x΄x λέγεται άξονας συνημιτόνων και ο άξονας y΄y άξονας ημιτόνων.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τη γωνία των 60° της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ. Από το σύστημα συντεταγμένων βρίσκουμε ότι η τετμημένη x του Μ είναι: $x_M = 0,5$ και η τεταγμένη του είναι: $y_M = 0,866$, οπότε:



$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = 0,5$ και $\eta\mu 60^\circ = 0,866$.

Όμως και οι γωνίες $1 \cdot 360^\circ + 60^\circ = 420^\circ$, $2 \cdot 360^\circ + 60^\circ = 780^\circ$ και γενικά οι γωνίες της μορφής $\kappa \cdot 360^\circ + 60^\circ$ βρίσκονται στον τριγωνομετρικό κύκλο στο Μ, οπότε:

$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 420^\circ = \sigma\upsilon\nu 780^\circ = \sigma\upsilon\nu\left(\kappa \cdot 360^\circ + 60^\circ\right) = 0.5$ και

$\eta\mu 60^\circ = \eta\mu 420^\circ = \eta\mu 780^\circ = \eta\mu\left(\kappa \cdot 360^\circ + 60^\circ\right) = 0,866$.

Παρατήρηση

Επειδή οι τιμές του ημίτονου και του συνημίτονου μιας γωνίας δεν μπορούν κατά απόλυτη τιμή να υπερβούν την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{-1 \le \eta\mu\omega \le 1} \quad \textbf{και} \quad \boldsymbol{-1 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1}$$

Οι άξονες των εφαπτομένων και των συνεφαπτομένων

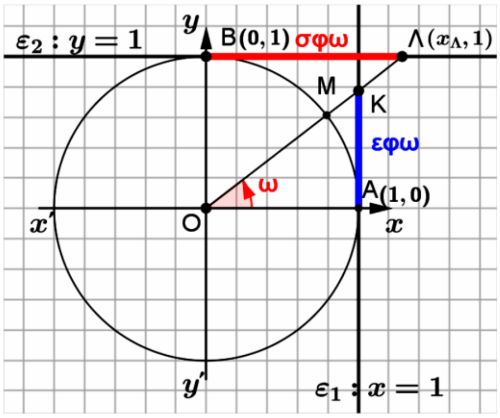
Θεωρούμε τις εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του τριγωνομετρικού κύκλου στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

Στο τρίγωνο ΟΑΚ ισχύει ότι:

$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AK}{OA} = \frac{AK}{1} = AK = y_K$

Δηλαδή $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega = y_K =}$ **τεταγμένη του K**.

Για το λόγο αυτό η ευθεία $\varepsilon_1 :\ x = 1$, ονομάζεται άξονας των εφαπτομένων.

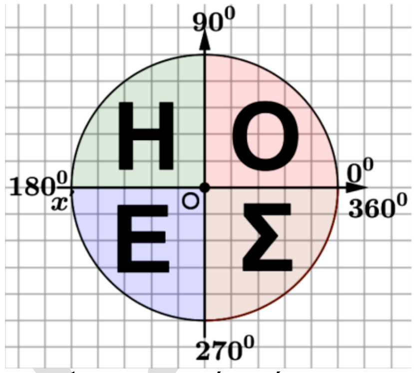


Όμοια $σφω = x_Λ =$ τετμημένη του $Λ$, και γι αυτό η ευθεία $ε_2: \ y = 1$ λέγεται άξονας συνεφαπτομένων.

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

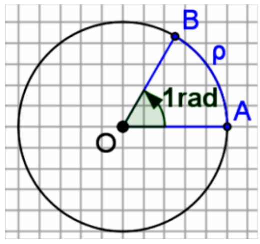
Για το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών παρατηρούμε ότι ισχύει ο παρακάτω πίνακας:

	1ο	2ο	3ο	4ο
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-



Παρατηρούμε ότι στο 1ο τεταρτημόριο **Ό**λοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί, για το λόγο αυτό στο κύκλο στο 1ο τεταρτημόριο έχουμε το γράμμα **Ο**. Στο 2ο τεταρτημόριο μόνο το ημίτονο είναι θετικό, για το λόγο αυτό έχουμε το γράμμα Η. Στο 3ο τεταρτημόριο η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη είναι θετικοί, οπότε προκύπτει το γράμμα Ε για το τεταρτημόριο αυτό. Τέλος στο 4ο τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι θετικό, οπότε προκύπτει το γράμμα $Σ$.

Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών



Έστω κύκλος (Ο,ρ). Ένα τόξο ΑΒ του κύκλου αυτού που το μήκος του είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου, λέγεται τόξο του ενός ακτινίου ή 1 rad.
Ακτίνιο ή 1 rad είναι η γωνία η οποία όταν γίνει επίκεντρη βαίνει στο τόξο ενός ακτινίου.
Έστω ότι μια γωνία ω είναι $μ^{\circ}$ και α rad .
Επειδή το μήκος ενός κύκλου ακτίνας ρ είναι 2πρ,η γωνία 360° είναι ίση με 2π rad οπότε ,η γωνία 1 rad είναι ίση με $\frac{360}{2π}$ μοίρες. Επομένως, η γωνία α rad είναι ίση με $\frac{180}{π} \cdot α$ μοίρες.
Επειδή όμως η γωνία ω είναι $μ^{\circ}$, θα ισχύει $μ = \frac{180}{π} \cdot α \Leftrightarrow \frac{μ}{180} = \frac{α}{π}$.
Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις διάφορες εφαρμογές.

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
μοίρες	**rad**	**ημω**	**συνω**	**εφω**	**σφω**
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{π}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{π}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{π}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{π}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0
180°	π	0	-1	0	Δεν ορίζεται
270°	$\frac{3π}{2}$	-1	0	Δεν ορίζεται	0

Σημείωση
Επειδή στο τριγωνομετρικό κύκλο το τόξο x rad έχει μήκος x, αντί να γράφουμε ημ(x rad), θα γράφουμε απλά ημx, και αντίστοιχα για τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς: συνx, εφx, σφx.

Ασκήσεις

68. Να αποδειχτεί ότι : $\dfrac{ημ60^\circ \cdot εφ30^\circ \cdot σφ45^\circ \cdot συν60^\circ}{εφ45^\circ \cdot συν30^\circ \cdot σφ60^\circ \cdot ημ30^\circ} = 1$.

69. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

α) $720°$ **β)** -13π rad **γ)** $1890°$ **δ)** $\dfrac{11\pi}{2}$ rad

70. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

α) $-\dfrac{35\pi}{6}$ rad **β)** $-315°$ **γ)** $-\dfrac{43\pi}{3}$ rad **δ)** $-3510°$

71. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{ημ405^\circ - ημ750^\circ}{συν1125^\circ + συν1860^\circ} = 3 - 2\sqrt{2}$.

72. Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω ζεύγη γωνιών έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $ω = 2κπ + \dfrac{3π}{10}$ και $φ = 2λπ - \dfrac{17π}{10}$ **β)** $ω = 2κπ - \dfrac{7π}{5}$ και $φ = 2λπ + \dfrac{3π}{5}$

γ) $ω = κ \cdot 360^\circ + 230^\circ$, $φ = λ \cdot 360^\circ - 130^\circ$ και **δ)** $ω = κ \cdot 360^\circ - 40^\circ$, $φ = λ \cdot 360^\circ + 320^\circ$

73. Αν $\dfrac{9π}{2} < x < \dfrac{14π}{3}$ να αποδείξετε ότι: $ημx - συνx > εφx + σφx$.

74. Αν $\dfrac{5π}{2} < x < 3π$ να αποδείξετε ότι: $ημx - εφx > συνx + σφx$.

75. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει γωνία ω ώστε : $συνω = α^2 - 2α + 3, α \in \mathbb{R}$.

76. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

α) $ημ^2x + 12 \le 7ημx$ **β)** $συν^2x - 1 = συνx + 5$

77. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad όταν:

α) $0 < x < \dfrac{π}{2}$ και $ημx = \dfrac{2}{5}$ **β)** $\dfrac{π}{2} < x < π$ και $συνx = -\dfrac{12}{13}$

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$\boxed{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1}$ $\boxed{\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}$ $\boxed{\sigma\varphi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}$ $\boxed{\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=1}$

$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2x}}$ $\boxed{\eta\mu^2x=\frac{\varepsilon\varphi^2x}{1+\varepsilon\varphi^2x}}$

Ασκήσεις

78. Αν $\eta\mu x=\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

79. Αν $\varepsilon\varphi x=\frac{3}{4}$ και $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

80. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\eta\mu x-\varepsilon\varphi x)^2+(\sigma\upsilon\nu x-1)^2=\left(1-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2$ **β)** $\frac{\sigma\upsilon\nu^3x}{\eta\mu x}+\frac{\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2x}=\sigma\varphi x$

81. Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\varphi^2x\cdot\eta\mu^2x=1$ **β)** $(\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\eta\mu x)^2+(\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x)^2=\alpha^2+\beta^2$

γ) $\eta\mu^2x\cdot\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

ε) $\varepsilon\varphi^2x+\sigma\varphi^2x+2=\frac{1}{\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x}$ **ε)** $\frac{\varepsilon\varphi x}{1-\sigma\varphi x}+\frac{\sigma\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x}=\frac{1+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$

82. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x)^2=\frac{1}{\eta\mu^2x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$ **β)** $\eta\mu^2x\cdot\varepsilon\varphi x-\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\sigma\varphi x=\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x$

γ) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}+\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$ **δ)** $\frac{\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}=1+\sigma\upsilon\nu\alpha$

ε) $\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\varepsilon\varphi x\right)^2=\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}$ **στ)** $\frac{1-3\eta\mu x}{1-\eta\mu x}+\frac{2\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=-3\varepsilon\varphi^2x$

83. Να αποδείξετε ότι :

α) $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\le\frac{1}{2}$ **β)** $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x\ge 2,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ **γ)** $\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2y+2\eta\mu x\cdot\eta\mu y\le 2$

84. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η παράσταση $K=\eta\mu^6x+\sigma\upsilon\nu^6x+\alpha\left(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x\right)$ να είναι ανεξάρτητη του x και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης Κ.

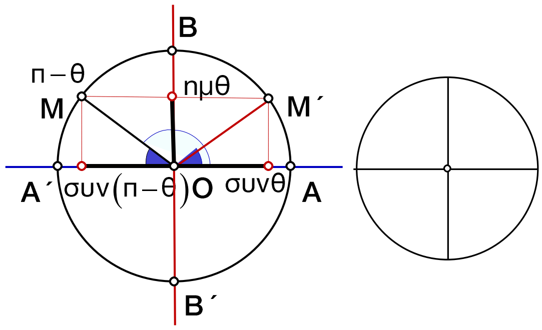
85. Να αποδειχτεί ότι $-\sqrt{5}\le\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x\le\sqrt{5}$.

86. Αν ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $(1+\eta\mu\varphi)x^2-\left(1+\eta\mu^2\varphi\right)x+(1-\eta\mu\varphi)\eta\mu\varphi=0, \eta\mu\varphi\ne-1$, να δείξετε ότι $\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2=1$.

\

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

1. Παραπληρωματικές γωνίες $(\theta,\ \pi-\theta)$

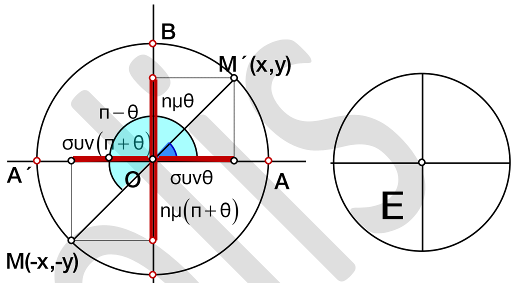


Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\eta\mu(\pi-\theta)=\eta\mu\theta,\quad \sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

$\varepsilon\varphi(\pi-\theta)=-\varepsilon\varphi\theta,\quad \sigma\varphi(\pi-\theta)=-\sigma\varphi\theta$

2. Γωνίες που διαφέρουν κατά π. $(\theta,\ \pi+\theta)$

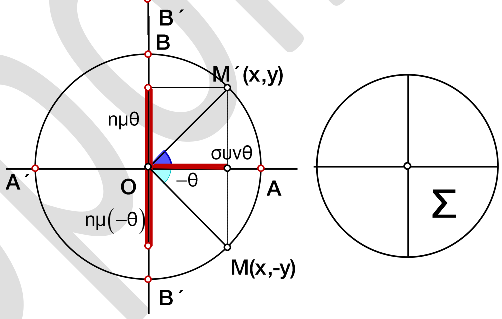


Οι γωνίες που διαφέρουν κατά π έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη και αντίθετα ημίτονα και συνημίτονα.

$\varepsilon\varphi(\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta \qquad \sigma\varphi(\pi+\theta)=\sigma\varphi\theta$

$\eta\mu(\pi-\theta)=-\eta\mu\theta \qquad \sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

3. Αντίθετες γωνίες $(\theta,\ -\theta)$

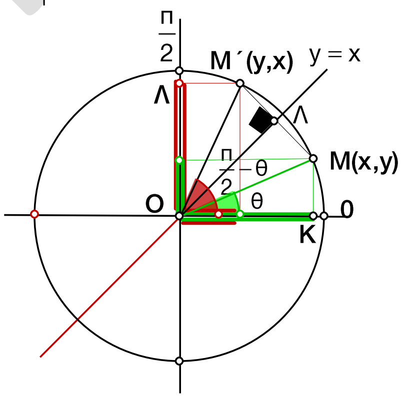


Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\sigma\upsilon\nu(-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta \qquad \eta\mu(-\theta)=-\eta\mu\theta$

$\varepsilon\varphi(-\theta)=-\varepsilon\varphi\theta \qquad \sigma\varphi(-\theta)=-\sigma\varphi\theta$

4. Συμπληρωματικές γωνίες $\left(\theta,\ \frac{\pi}{2}-\theta\right)$



Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα $90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$, το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta \qquad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\theta$

$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\varphi\theta \qquad \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\theta$

Ασκήσεις

87. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
α) $210°$ **β)** $-1050°$ **γ)** $315°$ **δ)** $3750°$ **ε)** $7320°$

88. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
α) $\frac{7\pi}{6}$ **β)** $\frac{3\pi}{4}$ **γ)** $\frac{2014\pi}{6}$ **δ)** $-\frac{43\pi}{6}$

89. Να δείξετε ότι:

α) $\dfrac{\eta\mu\frac{5\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}\cdot\varepsilon\varphi\frac{4\pi}{3}}{\eta\mu\frac{4\pi}{3}\cdot\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{4}\cdot\sigma\varphi\frac{7\pi}{6}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **β)** $\dfrac{1-\eta\mu\left(270^\circ+\theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(90^\circ+\theta\right)}=\dfrac{\eta\mu\left(180^\circ+\theta\right)}{1+\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-\theta\right)}$

90. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\eta\mu(\pi-\alpha)-\eta\mu(-\alpha)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=0$

91. Να απλοποιήσετε τη παράσταση $A=\sigma\upsilon\nu(x-\pi)+\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\eta\mu(x-\pi)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

92. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\eta\mu(21\pi-\theta)\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2}-\theta\right)\varepsilon\varphi(9\pi+\theta)}{\sigma\varphi\left(\frac{15\pi}{2}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu(7\pi+\theta)\eta\mu(20\pi+\theta)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{31\pi}{2}-\theta\right)}=1$.

93. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu(3\pi-\theta)\sigma\upsilon\nu(5\pi+\theta)\varepsilon\varphi(2014\pi-\theta)\sigma\varphi(2015\pi-\theta)}{\sigma\upsilon\nu(-2017\pi-\theta)\varepsilon\varphi(31\pi+\theta)\sigma\varphi(9\pi+\theta)\eta\mu(7\pi+\theta)}=-1$

94. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)\sigma\varphi\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{17\pi}{2}-\theta\right)\eta\mu\left(\frac{19\pi}{2}-\theta\right)\sigma\varphi\left(\frac{13\pi}{2}-\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2}-\theta\right)}=1$

95. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu(\theta-9\pi)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}-\theta\right)\varepsilon\varphi\left(-\theta-\frac{27\pi}{2}\right)\varepsilon\varphi(\theta-23\pi)}{\sigma\upsilon\nu(\theta-11\pi)\sigma\varphi\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)}=\eta\mu\theta$

96. Αν Α,Β,Γ γωνίες τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)+\sigma\upsilon\nu A=0$ **β)** $\varepsilon\varphi\frac{A+\Gamma}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=1$

γ) $\eta\mu^2\frac{B+\Gamma}{2}+\eta\mu^2\frac{A}{2}=1$ **γ)** $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu(2A+B+\Gamma)=0$

97. Αν για τις οξείες γωνίες Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\eta\mu B=\frac{\sqrt{7}}{4}$ και $\eta\mu\Gamma=\frac{3}{4}$, να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

98. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x-1$ και $g(x)=2\eta\mu^2 x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x-1$.

Να αποδείξετε ότι: **α)** $g(\pi+x)=g(x)$ **β)** $f(\pi+x)=f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

99. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu 1^\circ+\sigma\upsilon\nu 2^\circ+\sigma\upsilon\nu 3^\circ+...+\sigma\upsilon\nu 178^\circ+\sigma\upsilon\nu 179^\circ=0$

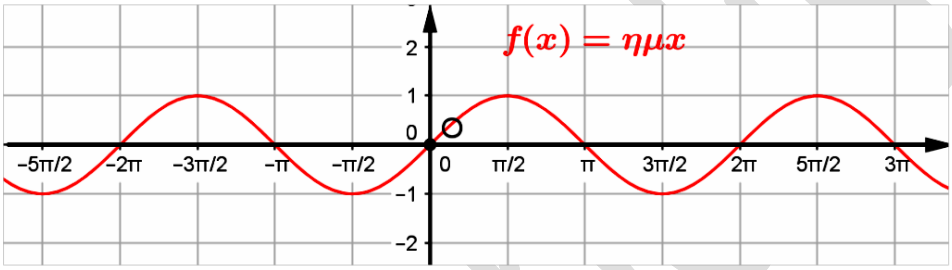
β) $\varepsilon\varphi 1^\circ\cdot\varepsilon\varphi 2^\circ\cdot\varepsilon\varphi 3^\circ\cdots\varepsilon\varphi 88^\circ\cdot\varepsilon\varphi 89^\circ=1$

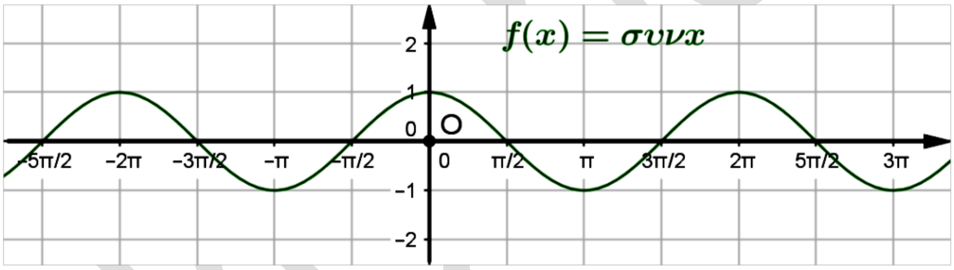
γ) $\eta\mu 0^\circ+\eta\mu 1^\circ+\eta\mu 2^\circ+...+\eta\mu 358^\circ+\eta\mu 359^\circ+\eta\mu 360^\circ=0$

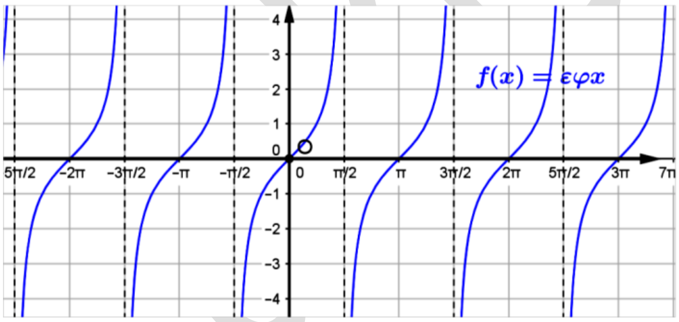
100. Αν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

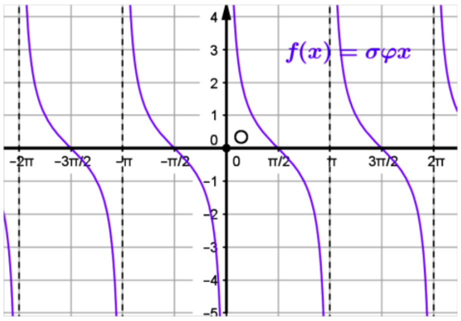
$K=\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ και $\Lambda=\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις









Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$, $\rho,\omega>0$

Στη συνάρτηση f το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της που είναι ίση με $-\rho$.

Το ω καθορίζει την περίοδο Τ της συνάρτησης. Είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για τη συνάρτηση $g(x)=\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho,\omega>0$.

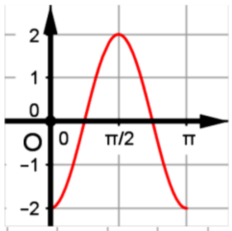
Ασκήσεις

101. Να βρείτε το μέγιστο το ελάχιστο και την περίοδο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=4\eta\mu x$ **β)** $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x-5$ **γ)** $f(x)=-3\eta\mu 3x+4$ **δ)** $f(x)=-5\sigma\upsilon\nu 3x$

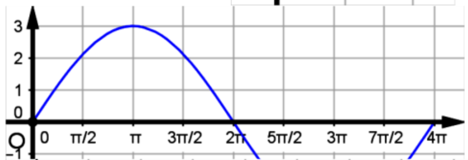
102. Το διπλανό σχήμα παριστάνει τη γραφική παράσταση της $g(x)=\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x),\ \rho<0,\ \omega>0$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών $\omega,\ \rho$.

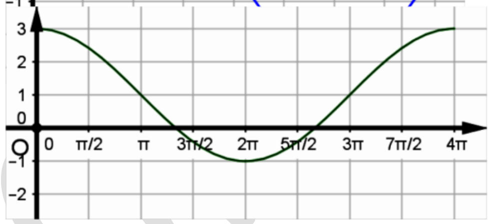


103. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x),\ \rho,\omega>0$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών $\omega,\ \rho$.



104. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu(\omega x)+\beta,\ x\in[0,4\pi]$. Να βρείτε τα α, β, ω.



105. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)-2\eta\mu(2x-\pi).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=3\eta\mu 2x$.

β) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f, όταν $0\le x\le 2\pi$.

106. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(3\kappa+2)\sigma\upsilon\nu\left[(2\lambda+1)x\right]$ και $g(x)=(\lambda+1)\sigma\upsilon\nu\left[(\kappa+2)x\right],\ \lambda,\kappa>0$. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων κ, λ, ώστε η μέγιστη τιμή της f να είναι διπλάσια από τη μέγιστη τιμή της g και η περίοδος της g να είναι διπλάσια από την περίοδο της f.

107. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu 2x+\beta,\ \alpha>0$. Να βρείτε τα α,β, αν η f έχει μέγιστο το 4 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{5}{2}\right)$.

108. Το βάθος του νερού σε μέτρα κάτω από τη γέφυρα του Ευρίπου κατά τη διάρκεια της ημέρας δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=20+4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{3}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες $0\le t\le 24$.

α) Να βρείτε τη περίοδο της συνάρτησης.

β) Ποιο είναι το μέγιστο και ποιο το ελάχιστο βάθος του νερού;

γ) Αν το ύψος της γέφυρας είναι 30m (από τον πυθμένα του νερού), να εξετάσετε αν ένα σκάφος ύψους 8m από την επιφάνεια του νερού μπορεί να περάσει από τη γέφυρα στις12 το μεσημέρι;

δ) Να βρεθεί το βάθος του νερού στης 1 π.μ. και στις 5 π.μ. Ποιες άλλες ώρες της ημέρας το νερό θα έχει το ίδιο βάθος;

109. Έχει διαπιστωθεί ότι η ακτινοβολία που απορροφά το ανθρώπινο σώμα κατά την έκθεση του στον ήλιο δίνεται από τη συνάρτηση $A(t)=4-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, όπου $0\le t\le 4$ ο χρόνος σε ώρες που αντιστοιχεί από τις 11π.μ. έως και τις 3 μ.μ.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της A.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

γ) Ποια ώρα της ημέρας έχουμε τη μέγιστη ακτινοβολία;

δ) Αν η απορρόφηση της ακτινοβολίας ήταν επικίνδυνη για το ανθρώπινο σώμα όταν η τιμή S της $A(t)$ είναι πάνω από 4 μονάδες, τότε ποιες ώρες της ημέρας θα πρέπει να αποφύγουμε τον ήλιο;

110. Από ένα ταξιδιωτικό γραφείο διοργανώνονται εκδρομές σε κάποιο εξωτικό νησί και η συμμετοχή ατόμων (σε δεκάδες) κατά τη διάρκεια όλης της χρονιάς δίνεται από τη συνάρτηση $E(t)=6-3\eta\mu\frac{\pi t}{6}$, όπου t ο χρόνος σε μήνες ($t=1$ αντιστοιχεί στον Ιανουάριο, $t=2$ αντιστοιχεί στον Φεβρουάριο…)

α) Υπολογίστε πόσα άτομα συμμετέχουν τον Ιούλιο.
β) Να βρείτε πόσο είναι η μέγιστη μηνιαία συμμετοχή εκδρομέων.
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση όταν $0\le t\le 12$.
δ) Να βρείτε ποιους μήνες έχουμε μειωτική τάση στη συμμετοχή των εκδρομέων.

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

$\eta\mu x=\eta\mu\theta \Leftrightarrow x=2k\pi+\theta$ ή $x=2k\pi+\pi-\theta$

$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x=2k\pi\pm\theta$

$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x=k\pi+\theta$

$\sigma\varphi x=\sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x=k\pi+\theta$

$k\in\mathbb{Z}$

Ειδικές περιπτώσεις

1. $\eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

2. $\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

3. $\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

4. $\sigma\upsilon\nu x=-1 \Leftrightarrow x=2k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

5. $\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

6. $\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Ασκήσεις

111. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x=\frac{1}{2}$ **β)** $\eta\mu x=-\frac{1}{2}$ **γ)** $\eta\mu x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

δ) $\eta\mu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **ε)** $\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **στ)** $\eta\mu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

112. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$ **β)** $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$ **γ)** $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

δ) $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **ε)** $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **στ)** $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

113. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu 2x+\sqrt{3}=0$ **β)** $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$ **γ)** $\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$

δ) $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$ **ε)** $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$ **στ)** $2\sigma\upsilon\nu\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$

ζ) $2\left[\eta\mu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right]=2$ **η)** $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ **θ)** $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$

114. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $εφ\left(\frac{π}{3}-3x\right)=-\sqrt{3}$ **β)** $\sqrt{3}εφ\left(2x+\frac{π}{6}\right)-1=0$ **γ)** $2σφ\left(x+\frac{3π}{4}\right)-2=0$

115. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{3}(1+ημx)(2+συνx)=0$ **β)** $\left(3εφx-\sqrt{3}\right)\left(1-συν^2x\right)=0$

γ) $(συνx-1)\left(2ημx-\sqrt{2}\right)=0$ **δ)** $(συνx-1)ημx=0$

116. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $ημ\left(x-\frac{π}{3}\right)=ημ\left(x+\frac{π}{6}\right)$ **β)** $ημ\left(2x+\frac{π}{6}\right)=ημ\left(x-\frac{5π}{6}\right)$

γ) $ημ\left(3x+\frac{π}{4}\right)=-ημ\left(x-\frac{3π}{4}\right)$ **δ)** $ημ3x+ημ\left(x+\frac{π}{3}\right)=0$

ε) $συν\left(x-\frac{π}{3}\right)=συν\left(x+\frac{π}{6}\right)$ **στ)** $συν\left(2x+\frac{π}{6}\right)=συν\left(x-\frac{5π}{6}\right)$

ζ) $συν\left(3x+\frac{π}{4}\right)=-συν\left(x-\frac{3π}{4}\right)$ **η)** $συν3x+συν\left(x+\frac{π}{3}\right)=0$

θ) $εφ\left(x-\frac{π}{3}\right)=εφ\left(x+\frac{π}{6}\right)$ **ι)** $σφ\left(2x+\frac{π}{6}\right)=σφ\left(x-\frac{5π}{6}\right)$

κ) $εφ\left(3x+\frac{π}{4}\right)=-εφ\left(x-\frac{3π}{4}\right)$ **λ)** $σφ3x+σφ\left(x+\frac{π}{3}\right)=0$

117. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $ημ2x=συν\left(x-\frac{π}{3}\right)$ **β)** $ημ\left(x+\frac{5π}{6}\right)=συν\left(x-\frac{π}{3}\right)$

γ) $συν\left(x+\frac{π}{3}\right)+ημ\left(x+\frac{π}{6}\right)=0$ **δ)** $ημ\left(2x+\frac{π}{4}\right)+συν\left(x+\frac{π}{2}\right)=0$

ε) $εφ\left(2x+\frac{3π}{4}\right)=σφ\left(x+\frac{π}{4}\right)$ **στ)** $εφ\left(3x-\frac{π}{4}\right)=-σφ\left(x+\frac{π}{3}\right)$

ζ) $εφ2x\cdot εφx=1$ **η)** $σφ\left(2x+\frac{π}{4}\right)σφx+1=0$

118. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2ημ^2x-3ημx+1=0$ **β)** $2συν^2x+1=5ημx$ **γ)** $εφx+3σφx=2\sqrt{3}$

δ) $\frac{1}{συν^2x}+1=3εφx$ **ε)** $ημ^3x-2ημ^2x-8ημx=0$ **στ)** $4ημ^4x+5συν^2x-4=0$

119. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $εφ^2x+εφx=0$ **β)** $2ημxσυν^2x=ημx$ **γ)** $1+ημxσυνx-ημx-συνx=0$

δ) $\sqrt{3}\cdot εφx=2ημx$ **ε)** $εφx+\frac{συνx}{1+ημx}=2$ **στ)** $\frac{1-συνx}{ημx}+\frac{ημx}{1+συνx}=4$

120. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $ημx=συνx$ **β)** $ημx+συνx=0$ **γ)** $ημx=\sqrt{3}συνx$ **δ)** $συνx+\sqrt{3}ημx=0$

121. Να λύσετε την εξίσωση: $7-|ημx-3|-4ημ^2x=συν^2x+|2-ημx|$

122. Να λύσετε την εξίσωση: $5\left(\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x\right)\left(\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu x\right)+3\eta\mu^2x=0$

123. Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $\eta\mu^{2016}2x+\sigma\upsilon\nu^{2018}x=0$ **β)** $\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x=\frac{1}{2}$

124. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\frac{(x-1)\pi}{3}=\frac{x^4+1}{2x^2}$

125. Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}\eta\mu x\right)=1$ **β)** $\eta\mu\left(\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=1$

126. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στα αντίστοιχα διαστήματα:

α) $2\sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$ στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ β) $2\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

γ) $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ στο $(0,2\pi)$ **δ)** $\varepsilon\varphi\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ στο $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

ε) $\eta\mu x-1=\sigma\upsilon\nu^2x$ στο $[\pi,3\pi]$ **στ)** $\eta\mu^2 2x+\eta\mu^2x=0$ στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

127. Να λύσετε στο διάστημα $[0,\pi]$ την εξίσωση $\sqrt{2\eta\mu x+1}=\sigma\upsilon\nu x$

128. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1}{\eta\mu x}+\sigma\varphi x-1\right)\left(\frac{1}{\eta\mu x}-\sigma\varphi x+1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$ στο διάστημα $(0,\pi)$.

129. Έστω η συνάρτηση : $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\eta\mu x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **β)** Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=\eta\mu x$.

130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2 3x-1}{2\eta\mu^2x-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί α ± β

$\boxed{ημ(α+β)=ημασυνβ+ημβσυνα}$ $\boxed{ημ(α-β)=ημασυνβ-ημβσυνα}$

$\boxed{συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ}$ $\boxed{συν(α-β)=συνασυνβ+ημαημβ}$

Ασκήσεις

131. Αν $ημx-ημy=1$ και $συνx+συνy=\sqrt{3}$, να βρείτε το $συν(x+y)$

132. Να αποδείξετε ότι:

α) $συν(α+β)συν(α-β)=συν^2α-ημ^2β$ **β)** $\dfrac{ημ(α+β)ημ(α-β)}{συν^2ασυν^2β}=εφ^2α-εφ^2β$

133. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $Α=συν^2x+συν^2\left(\dfrac{π}{3}+α\right)+συν^2\left(\dfrac{π}{3}-α\right)$ είναι ανεξάρτητη του α.

134. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

α) $ημ^2Α+ημ^2Β+ημ^2Γ-2συνΑσυνΒσυνΓ=2$

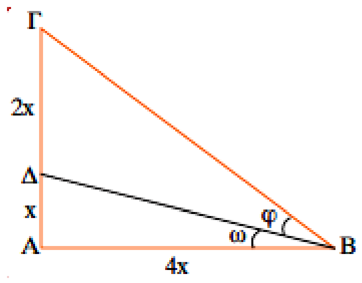
β) $ημ^2\dfrac{Α}{2}+ημ^2\dfrac{Β}{2}+ημ^2\dfrac{Γ}{2}-2ημ\dfrac{Α}{2}ημ\dfrac{Β}{2}ημ\dfrac{Γ}{2}=1$

γ) $ημΑημ(Β-Γ)+ημΒημ(Γ-Α)+ημΓημ(Α-Β)=0$

δ) $ημΑσυνΒ-ημΓ=-συνΑημΒ$

135. Στο διπλανό τρίγωνο δίνεται ότι ΓΔ=2x,ΑΔ=x και ΑΒ=4x.Να δείξετε ότι:

α) $εφφ=\dfrac{8}{19}$ **β)** $φ>ω$



136. Δίνεται μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, για το οποίο ισχύει ότι: $\dfrac{ημΑ}{συνΒσυνΓ}=2εφΓ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

137. Αν για τις γωνίες Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $εφΓ=\dfrac{1}{2}$ και $εφΒ=\dfrac{1}{3}$, να υπολογίσετε τη γωνία Α.

138. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $ημ\left(x+\dfrac{π}{6}\right)=2συνx$ **β)** $εφ\left(x-\dfrac{π}{4}\right)=1-σφx$ **γ)** $συν\left(x+\dfrac{π}{4}\right)-συν\left(\dfrac{π}{4}-x\right)=1$

139. Να λύσετε την εξίσωση $ημ(ημx)\cdot συν(συνx)-ημ(συνx)\cdot συν(ημx)=0$

140. Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $\sqrt{3}ημx+συνx=1$ **β)** $\sqrt{3}ημx-συνx=\sqrt{2}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

$$\boxed{ημ2α = 2ημασυνα}$$

$$\boxed{συν2α = συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1 = 1 - 2ημ^2α}$$

$$\boxed{εφ2α = \frac{2εφα}{1 - εφ^2α}}$$

$$\boxed{σφ2α = \frac{σφ^2α - 1}{2σφα}}$$

Τύποι αποτετραγωνισμού: $\boxed{ημ^2α = \frac{1 - συν2α}{2}}$ $\boxed{συν^2α = \frac{1 + συν2α}{2}}$ $\boxed{εφ^2α = \frac{1 - συν2α}{1 + συν2α}}$

Τύποι συναρτήσει του $\frac{α}{2}$:

$$ημα = 2ημ\frac{α}{2}συν\frac{α}{2} \qquad συνα = συν^2\frac{α}{2} - ημ^2\frac{α}{2} \qquad εφα = \frac{2εφ\frac{α}{2}}{1 - εφ^2\frac{α}{2}}$$

$$ημ^2\frac{α}{2} = \frac{1 - συνα}{2} \qquad συν^2\frac{α}{2} = \frac{1 + συνα}{2} \qquad εφ^2\frac{α}{2} = \frac{1 - συνα}{1 + συνα}$$

$$ημα = \frac{2εφ\frac{α}{2}}{1 + εφ^2\frac{α}{2}} \qquad συνα = 2συν^2\frac{α}{2} - 1 = 1 - 2ημ^2\frac{α}{2} \qquad συνα = \frac{1 - εφ^2\frac{α}{2}}{1 + εφ^2\frac{α}{2}}$$

Ασκήσεις

141. Αν $ημx + συνx = \frac{3}{4}$ να υπολογιστεί το $ημ2x$ και το $συν2x$ αν γνωρίζουμε ότι $-\frac{π}{4} < x < 0$.

142. Για τη γωνία α ισχύει ότι: $5συν2α - 14συνα - 7 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $συνα = -\frac{3}{5}$

β) Αν επιπλέον ισχύει: $π \le α \le \frac{3π}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ2α, συν2α, εφ2α.

143. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{1 + συν4α + συν2α}{ημ4α + ημ2α} = σφ2α$ **β)** $\frac{συνx + ημx}{συνx - ημx} - \frac{συνx - ημx}{συνx + ημx} = 2εφ2x$

144. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $6 + 3συνx + συν2x > 0$

145. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει ότι: $ημΑ - 2συνΓσυν\frac{Α}{2} = 0$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

146. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $συν2x - συν^2x = 0$ **β)** $ημ2x - συνx = 2ημx - 1$ **γ)** $συνx + 2ημ\frac{x}{2} = 1$

147. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu^2 x+5\sigma\upsilon\nu x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(f(x)+2\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^2-8\left(f(x)+2\sigma\upsilon\nu^2 x\right)-20=0$.

148. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha+2\eta\mu(2\beta x)$ και $g(x)=\alpha+\beta+\sigma\upsilon\nu\left((\alpha+\beta)x\right)$, $\alpha,\beta>0$. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και την ίδια περίοδο, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$.
β) Να βρείτε τη τιμή της παράστασης $A=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+3=2g(x)$ στο διάστημα $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

149. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2-\sigma\upsilon\nu 2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και την περίοδο της f.
β) Να υπολογίσετε τις τιμές της f για $x=0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$ και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f για $0\le x\le\pi$.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\frac{5}{2}$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(f(x)-2\right)^2+2f(x)-3=0$

150. Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$, $\omega>0$, έχει περίοδο π και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{4},2\right)$.

α) Να βρείτε τα ρ,ω.
β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0,2\pi]$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

151. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1}{\eta\mu x}+\sigma\varphi x-1\right)\left(\frac{1}{\eta\mu x}-\sigma\varphi x+1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να δείξετε ότι $f(x)=2\sigma\varphi x$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$ στο διάστημα $(0,\pi)$.

152. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\eta\mu(\pi+2x)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\eta\mu 2x$.
β) Να βρείτε την περίοδο T της συνάρτησης f,τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.
δ) Να λύσετε στο διάστημα $[0,\pi)$ την εξίσωση $f(x)-1=0$.

153. Δίνεται η συνάρτηση: $f\left(x\right)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sigma\upsilon\nu\left(20\pi-x\right)+2}{\eta\mu\left(\dfrac{7\pi}{2}+x\right)+\eta\mu\left(5\pi-x\right)+4}$.

α) Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=\dfrac{-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2}{-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+4}$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

γ) Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$.

154. Δίνεται η παράσταση: $f\left(x\right)=\eta\mu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x+2$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να παραγοντοποιήσετε την f.

β) Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f\left(x\right)=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π.

στ) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο το 4.

155. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{3}\varepsilon\varphi^2 x-(\sqrt{3}+1)\varepsilon\varphi x+1$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

β) Αν θ η μεγαλύτερη ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\theta\right)\varepsilon\varphi\left(\pi-\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{9\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu\left(1821\pi+\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(-\theta\right)\sigma\varphi\left(\dfrac{17\pi}{2}-\theta\right)}=-1$$

156. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=2\eta\mu x$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

β) Για ποιες τιμές του x παίρνει ελάχιστη τιμή η συνάρτηση;

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(x\right)+\eta\mu^2 x=3+\sigma\upsilon\nu^2 x$.

δ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\dfrac{f\left(8\pi-x\right)f\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)f\left(\dfrac{9\pi}{2}-x\right)f\left(7\pi+x\right)}{f^2\left(\dfrac{13\pi}{2}+x\right)f^2\left(x\right)}$ είναι ανεξάρτητη του x.

157. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{\eta\mu x\cdot\varepsilon\varphi x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=1+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

δ) Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\dfrac{\left(4k-1\right)\pi}{2}-x\right)$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=3$.

158. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημ^3 2x-ημ^2 2x-4ημ2x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{π}{2}-x\right)=f\left(\frac{3π}{2}-x\right)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x)=2ημ^3 2x-2ημ2x-f(x)$ καθώς και τις αντίστοιχες τιμές του x, για τις οποίες η συνάρτηση παίρνει την ελάχιστη τιμή.

159. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις: **α)** $εφ\left(\frac{π}{2}ημx\right)=1$ **β)** $ημ(π\cdot συνx)=1$

160. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+2ημxσυνx}{ημx+συνx}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=ημx+συνx$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)f(-x)+1=0$.

161. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{16εφ^2x}{1+εφ^2x}$ και $g(x)=εφ^2x+1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3g(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=16ημ^2x$ και $g(x)=\frac{1}{συν^2x}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $16ημ^2xσυν^2x-3=0$.

162. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημ(π-4x)-συν\left(\frac{3π}{2}+4x\right)+1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=ημ4x+1$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τη περίοδο της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x)-5ημ^2(π+4x)-1=0$.

163. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=αημ\frac{2x}{3}+β,\ α>0, β\in\mathbb{R}$ η οποία έχει μέγιστο το 3 και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο 1.

α) Να αποδείξετε ότι $α=2$ και $β=1$.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

γ) Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)^2+\left(f\left(\frac{3π}{4}-x\right)-1\right)^2=4$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(6x)=f(3x)$ στο διάστημα $[0,π]$.

164. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=ημ\left(2x+\frac{π}{4}\right)$ και $g(x)=συν\left(2x-\frac{π}{8}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι περιοδικές με περίοδο π.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών τους παραστάσεων.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(π)+f\left(\frac{π}{2}\right)+f\left(\frac{π}{4}\right)+f\left(\frac{3π}{4}\right)=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f^2(x)+g^2\left(-x-\frac{π}{16}\right)=1$.

165. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=συν\left(\frac{3π}{2}+2x\right)-2ημ(2π-2x)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=3ημ2x$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τη περίοδο της f και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0,2π]$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{3}{2}$ στο $\left[0,\frac{π}{2}\right]$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f^2(x)+f^2\left(\frac{π}{4}-x\right)=9$

166. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=αημ\left(x-\frac{π}{4}\right)+β$, $α, β\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A\left(-\frac{π}{4},-1\right)$, $B\left(\frac{π}{4},1\right)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $α=2$ και $β=1$

β) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης καθώς και την περίοδό της.

γ) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της f.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(2x+\frac{π}{4}\right)=2$.

ε) Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{π}{4}\right)-f\left(\frac{3π}{4}\right)+f\left(\frac{5π}{4}\right)-f\left(\frac{7π}{4}\right)+f\left(\frac{9π}{4}\right)=1$.

167. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-ημ^2x+ημx+2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $2π$.

β) Να αποδείξετε ότι κανένα σημείο της γραφικής παράστασης της f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα $(0,π)$ με τεταγμένη 2.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=f\left(\frac{π}{2}-x\right)$.

168. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=συν^2x-ημ^2x-3συνx+2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $2π$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το $-\frac{1}{8}$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2-3συνx$.

ε) Να λύσετε στο διάστημα $[0,π)$ την εξίσωση: $f(x)=f(π-x)$.

169. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-\frac{συν^2x}{1+ημx}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Αφού αποδείξετε ότι $1-\frac{συν^2x}{1+ημx}=ημx$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ) Να αποδείξετε ότι $ημ^2\left(\frac{3π}{2}-x\right)+ημ^2(31π+x)=1$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $2f^2(x)+ημx-1=0$.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Μονώνυμο

Μονώνυμο του x λέγεται κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν}, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος. Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

Πολυώνυμο

Πολυώνυμο του x λέγεται κάθε παράσταση της μορφής $\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{\nu}$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu}$, $\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}$,... ,$\alpha_1 x$, α_0 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{\nu}$ **συντελεστές** του. Τα πολυώνυμα της μορφής α_0, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται **σταθερά πολυώνυμα**. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο.**

Αν $\alpha_{\nu}\neq 0$, τότε ο αριθμός ν λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου. Είναι φανερό ότι κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

Αριθμητική τιμή ή απλά τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$ λέγεται ο αριθμός $P(\rho)=\alpha_{\nu}\rho^{\nu}+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+...+\alpha_1\rho+\alpha_0$. Αν είναι $P(\rho)=0$ τότε ο ρ λέγεται ρίζα του πολυωνύμου.

Ίσα πολυώνυμα

Δύο πολυώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $\beta_{\mu}x^{\mu}+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+...+\beta_1 x+\beta_0$ με $\mu\geq\nu$ είναι ίσα όταν: $\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1,...,\alpha_{\nu}=\beta_{\nu}$ και $\alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+2}=...=\alpha_{\mu}=0$

Πράξεις πολυωνύμων

- Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.
- Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Ασκήσεις

169. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=4x^3-6x^2+4x-8$ και $Q(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Να βρείτε τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς α, β, γ, δ, ώστε το πολυώνυμο $P(x)-Q(x)$, να είναι:
α) 3ου βαθμού **β)** το πολύ 2ου βαθμού **γ)** μηδενικού βαθμού

170. Να αναλύσετε τη κλασματική παράσταση $\dfrac{3x-3}{x^2-9}$ σε άθροισμα δύο κλασμάτων με πρωτοβάθμιους παρονομαστές.

171. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+16$ είναι τέλειο τετράγωνο του $Q(x)=x^2+x+\delta$.

172. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ δεύτερου βαθμού, για το οποίο ισχύει $P(2x+1)=P(2x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

173. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ το πολύ 2ου βαθμού, για το οποίο ισχύει ότι $P(x)+P(x-1)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

174. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύει ότι $P(x)+P^2(x)=x^2+5x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

175. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^2+3x+1$ και $Q(x)=x^2-3$.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(Q(x))$.

β) Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι: $\alpha x^8+\beta x^6+\gamma x^4+\delta x^2+\varepsilon=P(Q(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

176. Έστω πολυώνυμο $P(x)$. Αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)-x$, να αποδείξετε ότι είναι ρίζα και του $P(P(x))-x$.

177. Έστω πολυώνυμο $P(x)$. Αν το 2 είναι ρίζα του $P(x)-2x$, να αποδείξετε ότι είναι ρίζα και του $P(P(x)-2)-4$.

178. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $P\left((x+1)^2\right)=P^2(x)+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $P(0)=0$. Να υπολογίσετε το $P(25)$.

179. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $P(2x+1)=3P(x)+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $P(0)=0$. Να αποδείξετε ότι $P(15)=80$.

180. Έστω $\rho\neq 0$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)=\alpha x^4-\beta x^3+\beta x-\alpha,\ \alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα και το $\frac{1}{\rho}$.

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα α,β για τα οποία το πολυώνυμο έχει 4 ρίζες.

181. Αν ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζα άρτιο αριθμό, να αποδείξετε ότι ο σταθερός του όρος είναι άρτιος.

182. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ για τα οποία ισχύει ότι $(P(x)-2)(Q(x)+1)=2$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι σταθερά πολυώνυμα.

β) $P(x)Q(x)-4=2Q(x)-P(x)$

183. Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$ και $Q(x)=x^3-5x-8$ δεν έχουν κοινή ρίζα.

184. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(3x^2-3x+1)^{200}-x^2+1$. Να βρείτε τον σταθερό του όρο καθώς και το άθροισμα των συντελεστών του.

185. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $P(x)=2\beta x^3+\alpha x^2(x+2)+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-x)$ έχει άθροισμα των συντελεστών πέντε και ο σταθερός του όρος είναι μηδέν.

Διαίρεση πολυωνύμων

Θεώρημα (Ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)\neq 0$ υπάρχει μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ για τα οποία ισχύει: $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x)$ όπου το $\upsilon(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\upsilon(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης.

Παρατηρήσεις

Αν $\upsilon(x)=0$ τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια και η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται

$$\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)$$

Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$

Θεώρημα

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$.

Θεώρημα

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει **παράγοντα** το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

Ασκήσεις

186. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιρέσεων:

α) $(x^4+x^2-3x-3):(x^2-3x+2)$ **β)** $(5x^2-12x-32):(x-4)$

γ) $(3x^4-x^2-4x-3):(x+3)$ **δ)** $(x^4-k^4):(x-k)$

187. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(2x^3-7x^2+11x-4):(x^2-3x+4)$ χωρίς να κάνετε τη διαίρεση.

188. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=4x^3-5x^2+6x-8$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

α) $P(x):(x-1)$ **β)** $P(x):(x+2)$

189. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(\mu-3)x^2-x+3\mu$, $\mu\in\mathbb{R}$ και $Q(x)=P(2-x)+2xP(x-1)$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x-2$ είναι 22, να βρείτε το μ.

190. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+(2\beta-1)x^2+\alpha x+3$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$, να είναι 8.

191. Να βρείτε τα α, β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+(2\alpha+1)x^3+(3-\beta)x^2+5\beta x-2$ να έχει παράγοντα το x^2-3x+2.

192. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x+3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)(x+3)$.

193. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-1$ είναι 8 και με το $x+2$ είναι -7, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)(x+2)$.

194. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x+2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με x^2-4x+3 αφήνει υπόλοιπο $2x+7$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης: $P(x):(x+2)(x^2-4x+3)$.

195. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $xP(x-1)-(x+1)P(x)=-4x^3+12x^2-12x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ και με το $x-2$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2-3x+2.

196. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το x^2+x-2 είναι $3x+1$, να βρείτε το υπόλοιπο των διαιρέσεων $P(x):(x-1)$ και $P(x):(x+2)$.

197. Αν πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντες τα $x-\alpha$ και $x-\beta$, $\alpha\neq\beta$ τότε έχει παράγοντα και το $(x-\alpha)(x-\beta)$.

198. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\alpha)$ είναι β και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\gamma)$ είναι β, $\alpha\neq\gamma$. Να αποδείξετε ότι και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):\left[(x-\alpha)(x-\gamma)\right]$ είναι β.

199. Αν πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)=P(3x+8)$ έχει ρίζα το -2.

200. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ και ρ ρίζα της εξίσωσης $P(x)=x$. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)=P(P(x))+P(x)-2x$ έχει παράγοντα το $x-\rho$.

201. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\alpha$ είναι β και με το $x-\beta$ είναι α, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)=P(P(x))-x$ έχει ρίζες τα α και β.

202. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ του οποίου το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x-\alpha$ είναι β, με το $x-\beta$ είναι γ και με το $x-\gamma$ είναι α. Να αποδείξετε ότι τα α,β,γ είναι ρίζες του πολυωνύμου $Q(x)=P(P(P(x)))-x$.

203. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x(x-2)^{1821}+(x-1)^{1453}+2$.

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $Q(x)=x^3-3x^2+2x$.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $10\cdot8^{1821}+9^{1453}-89$ είναι πολλαπλάσιο του720.

204. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-4)^{20}+(2x-5)^{15}-2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x-3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{40}+11^{15}-2$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

γ) Να αποδείξετε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $9^{20}+21^{15}+1$ είναι το 3.

205. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $(x-2)P(x)+(x-1)P(x+2)=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι -2, τότε:

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-4$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2-6x+8.

γ) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

δ) Αν το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού, τότε να βρεθεί.

206. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $P(x+1)-P(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Αν ο σταθερός όρος του πολυωνύμου είναι μηδέν, να βρείτε:
α) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.
β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1821$.
γ) Το πολυώνυμο $P(x)$, αν γνωρίζετε ότι είναι δευτέρου βαθμού.

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής
$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$
Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου
$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, δηλαδή κάθε αριθμό ρ, για τον οποίο ισχύει $P(\rho)=0$.

Θεώρημα ακέραιων ριζών

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Ασκήσεις

207. Να λύσετε τις εξισώσεις :
α) $x^3-x^2-10x-8=0$
β) $x^4-2x^3-3x^2+8x-4=0$
γ) $4x^3-8x^2+x+3=0$
δ) $6x^4-7x^3-12x^2+3x+2=0$

208. α) Αν η εξίσωση $x^{10}+\alpha x^8+\beta x^6+1=0$ έχει ρίζα το 1, να αποδείξετε ότι: $|\alpha|+|\beta|\geq 2$.
β) Αν η εξίσωση $5x^3+2\alpha x^2+3\beta=0$ έχει ρίζα το 1, να αποδείξετε ότι: $2|\alpha|+3|\beta|\geq 5$.

209. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^3+2x^2-\lambda x+4=0$ έχει τουλάχιστον μία ακέραια ρίζα.

210. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντες τα $x+1$ και $x-2$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha=-5$ και $\beta=-6$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

211. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων
$f(x)=x^4+x^3-5x^2+2x+4$ και $g(x)=2x^2+3x-2$.

212. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο
$P(x)=x^3-x^2-(3+\alpha)x+\beta+10$ να έχει για παράγοντα το $(x-2)^2$.

213. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-5x+4$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-1$.
β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

214. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $x^4+3x^3+x^2-3x-2<0$ **β)** $x^3(x+1)-2>x(x-1)$ **γ)** $x^3-2x^2-x+2>0$

δ) $x^3+3x^3\geq 5x^2-9$ **ε)** $3x^4-x^3-9x^2+9x-2\leq 0$ **στ)** $x^4-3x^3+6x\leq 4$

215. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^6+2x^5+2x^4+2x^3+x^2+(x+1)^2$ δεν έχει κανένα σημείο κάτω από τον $x'x$.

216. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+8x-4$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

217. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3-11x^2+\beta x+18$ του οποίου δύο ρίζες είναι οι 1 και -2.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha=1$ και $\beta=-9$ **β)** Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

218. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2,\ x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι το $x+1$ είναι παράγοντας του $f(x)$ και να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του $f(x)$ με το $\pi(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $\pi(x)$ με το $x-2$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

219. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda x^3+x^2-(\lambda+5)x+4,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Αν το $P(x)$ έχει ρίζα για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ, τότε:

α) να βρείτε τη ρίζα. **β)** να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες του.

γ) Αν $\lambda=1$, να λύσετε την εξίσωση $\left(P(x)-x^3\right)^2+6P(x)=6x^3-5$.

220. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-\alpha x^3+\beta x^2-6x+4$ το οποίο έχει παράγοντα το x^2+2.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=4$. **β)** Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

221. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2+x-2 δίνει υπόλοιπο $3x+5$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=3$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=3x+5$.

222. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-10)(x-20)^{20}(x-30)^{30}$.

α) Να βρείτε το βαθμό του **β)** Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=-x+10$. **δ)** Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

223. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού, το οποίο διαιρείται με το x^2+1, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $(P(x)-2)^3+(P(x)-2)^2+P(x)>2$

Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

224. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt{x+1}=2$ **β)** $\sqrt{x+3}=-4$ **γ)** $\sqrt{2x+7}=x+2$ **δ)** $\sqrt{x}=-2x$

225. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt{5x+10}=8-x$ **β)** $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-1}=2$ **γ)** $\sqrt{x+32}+\sqrt{x}=16$

δ) $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\dfrac{4-\sqrt{x}}{2}$ **ε)** $\sqrt{x+1}=\sqrt{x}+2$ $\sqrt{x}$ - 2 = $\sqrt{x+1}$ **στ)** $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$

226. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\sqrt{3x+7}<\sqrt{x+3}$ **β)** $x-1\geq\sqrt{x+5}$ **γ)** $\sqrt{x^2+x+3}\geq x+\dfrac{1}{2}$

227. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\left(x^2-3x-2\right)^3+\left(x^2-3x-4\right)^2-8=0$ **β)** $2\sigma\upsilon\nu^3x-5\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu x+3=0$

228. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$ **β)** $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$

Θέματα ΟΕΦΕ στα πολυώνυμα

229. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\left(\lambda^3-4\lambda\right)x^3+\left(\lambda^2-2\lambda\right)x-\lambda+2$

α) Να βρείτε τον βαθμό του P(x) για τις διάφορες τιμές του λ.

β) Για λ=1 να βρεθεί το P(x) και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης P διέρχεται από το σημείο (1,-3).

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<-3$.

230. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x-20$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x+2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x+1$ είναι το -16 να αποδείξετε ότι α = 12 και β = 6.

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x)>0$

231. Δίνεται ότι το πολυώνυμο: $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει παράγοντες τους $x+1,\ x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=0$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

γ) Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε

i) Τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η C τέμνει τον άξονα y΄y.

ii) Τις τιμές του x για τις οποίες η C είναι κάτω από τον άξονα x'x

232. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και το πολυώνυμο $Q(x)=x^2+x-1$.

α) Να βρεθούν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η αριθμητική τιμή του P(x) για x = -3 είναι -8 και έχει παράγοντα το x + 2 .

β) Αν α = 2 και β = -2, να βρείτε το πηλίκο Π(x) της διαίρεσης του P(x) δια του Q(x) και να γράψετε το P(x) με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = Q(x) -1 .

233. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3-7x^2+\beta x+2$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν η διαίρεση του P (x) δια x - 1 δίνει υπόλοιπο 1 και η αριθμητική τιμή του για x = - 2 είναι 10, τότε:

Α. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Β. Για τις τιμές α = -5 και β = 10.

α. Να βρείτε το πηλίκο Π(x) της διαίρεσης του P(X) δια του $Q(x)=x^3+x^2-2x$ και να γράψετε το P(x) με την βοήθεια της ταυτότητας ευκλείδειας διαίρεσης.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=\upsilon(x)$ όπου υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) δια Q(x).

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης Q(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

234. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

β. Να λύσετε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις $\eta\mu x=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu x=\beta$ όπου α η διπλή ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και β η άλλη ρίζα της ίδιας εξίσωσης.

γ. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε η γραφική παράσταση της f, να μην είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

δ. Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $f(-x):(x^2+1)$.

235. Έστω το πολυώνυμο P(x) = $2x^3+(\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+5\beta)x+3$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Α. Να βρείτε τις τιμές των α,β $\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το x+1 να είναι παράγοντας του P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x): (x - 2) να ισούται με -9.

Β. Για α = -7 και β = 2:

α) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0

β) Να κάνετε τη διαίρεση P(x) :(x^2 -1) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

γ) Αν υ(x) το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\upsilon(x)}{P(x)}\geq 0$.

236. Έστω $P(x)=x^3+2\alpha x^2-\alpha^2x+2$ πολυώνυμο, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρεθεί με το x -1, δίνει υπόλοιπο 3α +1.

Α. Να βρείτε τις τιμές του αριθμού α.

Β. Για α = 1 και πολυώνυμο Q(x) = x^2 + x +1:

α) Να αποδείξετε ότι το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της Ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το Q(x) είναι x + 1 και -3x +1 αντίστοιχα.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)+x-2}{Q(x)}\geq 1$ **γ)** Να λύσετε την εξίσωση $\pi(x)=\sqrt{Q(x)}$

237. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, για την οποία ισχύουν:

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης της f(x) δια x +2 είναι 24.
- Η C_f διέρχεται από το σημείο Α(0,8).
- Η f (X) έχει παράγοντα το x - 1.

Α. Να δείξετε ότι: α = 1, β = -10 και γ = 8.

Β. α) Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 0.

β) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα x'x.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x+4}{f(x)}\leq\dfrac{2}{f(x)+f(-x)-18}$.

238. Έστω πολυώνυμο $P(x)=2x^5-3x^4-7x^3+(\lambda+6)x^2+7x+\mu$ για το οποίο ισχύουν:

i) Το x είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ είναι 3.

Α. Δείξτε ότι λ = 2 και μ = 0.

Β. Για λ = 2 και μ = 0,

i) Να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το (x^2-2).

ii) Να βρεθούν τα διαστήματα που η γραφική παράσταση του $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $y = x + 4$.

Γ. Έστω το πολυώνυμο: $Q(x) = 2x^5 + (2\alpha + \beta)x^4 - 7x^3 + (-3\alpha + 2\beta)x^2 + (\kappa + 6)x + (\kappa - 1)$.
Βρείτε τους αριθμούς α,β και κ ώστε $P(x) = Q(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εκθετική συνάρτηση

Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

Αν α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,τότε :

$(\alpha\beta)^x = \alpha^x \beta^x$

$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1 + x_2}$

$\left(\alpha^{x_1}\right)^{x_2} = \alpha^{x_1 + x_2}$

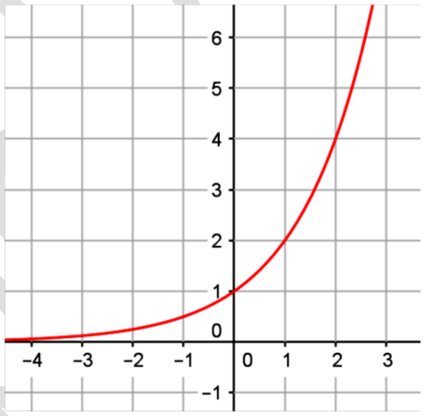
$\alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1 - x_2}$

$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x = \dfrac{\alpha^x}{\beta^x}$

Εκθετική συνάρτηση

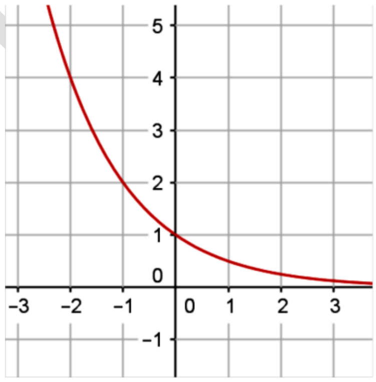
Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$,στη δύναμη α^x ,ορίζουμε την συνάρτηση : $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$, η οποία στην περίπτωση που είναι $\alpha \neq 1$,λέγεται
εκθετική συνάρτηση με βάση α **.**

Αν είναι $\alpha = 1$,τότε έχουμε την σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.



Για κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$, ισχύει ότι :

- Έχει **πεδίο ορισμού** το $\mathbb{R}$
- Έχει **σύνολο τιμών** το διάστημα $(0, +\infty)$
- Είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.
  Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$
- Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0,1) και έχει **ασύμπτωτη** τον αρνητικό ημιάξονα των x.



Για κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$, ισχύει ότι :

- Έχει **πεδίο ορισμού** το $\mathbb{R}$
- Έχει **σύνολο τιμών** το διάστημα $(0, +\infty)$
- Είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.
  Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$
- Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0,1) και έχει **ασύμπτωτη** τον θετικό ημιάξονα των x.

Ο αριθμός e

Αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^\nu = 2,718280...$ Τον αριθμό στον οποίο τείνει η ποσότητα $\left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$ καθώς το ν αυξάνεται απεριόριστα τον συμβολίζουμε με e (Euler).

Ασκήσεις

238. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2^{x-1} = \sqrt{2}$ **β)** $3^{x^2 - 4x + 6} = 27$ **γ)** $5^{x^4 - 5x^2 + 4} = 1$

δ) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+4} = \left(\sqrt{27}\right)^{2x+18}$ **ε)** $18^{8-4x} = \left(54\sqrt{2}\right)^{3x-2}$

239. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2^{x+3}-2^{x+2}+2^{x+1}=48$ **β)** $3^x+3^{x-1}=\dfrac{45}{3^{x+2}}+\dfrac{7}{3^x}$

γ) $3^x-3^{-x}=\dfrac{8}{3}$ **δ)** $5^{2x-1}+3\cdot5^{x+1}=80$

240. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις: **α)** $5^{\eta\mu^2 x}+5^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=4$ **β)** $e^{\sigma\upsilon\nu x}+e^{-\sigma\upsilon\nu x}=2$

241. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $3^{x+1}-2^x=3^{x-1}+2^{x+3}$ **β)** $3^{x^2-4x+4}=7^{(x-2)^2}$
γ) $5^{x-2}+3\cdot2^{x-3}=7\cdot5^{x-3}+2^x$ **δ)** $3\cdot2^{x-4}-2^{x-1}=5^{x-2}-6\cdot5^{x-3}$

242. Να λύσετε τις εξισώσεις **α)** $27^x-12^x-2\cdot8^x=0$ **β)** $9^x+6^x=2\cdot4^x$

243. Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $5^{x^2-x-12}\le1$ **β)** $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-x}<49^{x^2-2x}$ **γ)** $\alpha^{x^2-9}>1,\ \alpha>0$ **δ)** $11^{\sqrt{x}}\le\left(\sqrt{11}\right)^x$

244. Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $3^{x+1}-8\cdot3^{x-1}\ge3$ **β)** $25^x-26\cdot5^x+25<0$ **γ)** $2^x-2^{-x}>3\left(1-2^{-x}\right)$

245. Να λύσετε την ανίσωση: $1+25^{\sigma\upsilon\nu^2 x}\ge10\cdot5^{2\sigma\upsilon\nu^2 x-1}$

246. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9^x+3^x-12}$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\sqrt{78}$

247. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2e^{1-x}-2$ και $g(x)=e^x-e$.
α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f,g.
β) Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.

248. Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$ **β)** $3\cdot9^x+2\cdot4^x-5\cdot6^x\le0$

249. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\left(x^2+3x\right)\left(e^x-1\right)\left(3^x-9\right)}$

250. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases}2^x\cdot4^{x+y}=1024\\ 5^{x-3y}=\dfrac{1}{5}\end{cases}$ **β)** $\begin{cases}16\cdot2^{x-y}=4^{x+2}\\ 5^{x+3y-3}=125^{2y-x}\end{cases}$ **γ)** $\begin{cases}4\cdot3^x-2\cdot7^y=15\\ 3^x+5\cdot7^y=44\end{cases}$

δ) $\begin{cases}4^x-9^y=55\\ \sqrt{4^x}-3^y=5\end{cases}$ **ε)** $\begin{cases}3^{x+1}=5y\\ 5^{x+1}=3y\end{cases}$ **στ)** $\begin{cases}5^x-16y=0\\ 4^x=25y\end{cases}$

251. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{3-\alpha}{\alpha+1}\right)^x$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f, είναι:

α) Εκθετική συνάρτηση **β)** 1−1
γ) Γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ **δ)** Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

252. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{3-2\alpha}{\alpha-3}\right)^x$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ αν γνωρίζετε ότι $f(x)>1$ για κάθε $x<0$.

253. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha+2}{\alpha-1}\right)^x$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ αν γνωρίζετε ότι $f\left(\dfrac{6}{7}\right)>f\left(\dfrac{8}{9}\right)$.

254. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha\in(0,1)$. Να συγκρίνεται τους αριθμούς α^{1821}, α^{1896}, α^{2004}.

255. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\le f(\alpha)+f(\beta)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β) Να συγκρίνεται τους αριθμούς $\sqrt{e}$ και $\sqrt[3]{e^2}$.

256. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+e^{-x}$ και $g(x)=e^x-e^{-x}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)f(y)+g(x)g(y)=2f(x+y)$

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

257. Να λύσετε την εξίσωση α) $\left(x^2+x-1\right)^{3x-5}=1$ β) $(x-3)^{x^2}=(x-3)^{x+2}$

Σύνθετα Θέματα

258. η συνάρτηση $f(x)=5^x+x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι $5^\alpha-5^\beta<\beta-\alpha$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $5^{x^2-1}+x^2=5^{x+1}+x+2$.

259. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3^x+x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $3^x-3^{x+1}<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες $3^x-3^{x^2}>x^2-x$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $3^{x^2-3x}+x^2+6<3^{4x-6}+7x$

260. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε τη εξίσωση $e^x=1-x$.

γ) Αν $\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι $e^\alpha-e^\beta<\beta-\alpha$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^3}-e^x>x-x^3$.

261. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-e^{-x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το 2.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{2x}-e^{x}<e^{-2x}-e^{-x}$

262. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3^{x}+x-1$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $3^{x}=1-x$.
γ) Να βρείτε το πρόσημο της f.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x+1)+24x=26f(x)+35$.

263. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+e^{x}-2$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x}=2-e^{x}$.
γ) Να βρείτε το πρόσημο της f.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^{2x}+1\right)-f\left(e^{x}-1\right)<0$.
ε) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2e^{x}}-e^{2e^{2}}=e^{e^{2}}-e^{e^{x}}$.

264. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=4^{x}+2$ και $g(x)=6\cdot 2^{x}-6$.
α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.
β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(2^{x}\right)>g\left(2^{x}\right)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3-x$.

265. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=21\cdot 3^{x}+5^{x+3}$ και $g(x)=3^{x+4}+5^{x+2}$.
α) Να αποδείξετε ότι οι f,g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις.
β) Να λύσετε την εξίσωση $21\cdot 3^{x}+5^{x+3}=32$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $3^{x+4}+5^{x+2}=10$.
δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

266. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\lambda-1)^{x}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε το λ.
β) Αν $\lambda=3$ να λύσετε την ανίσωση $f(2x)+16\le 5f(x+1)$.
γ) Αν $1<\lambda<2$ να λύσετε την ανίσωση $f\left(2^{x}+3\right)-f\left(12-2^{3-x}\right)>0$.
δ) Αν $\lambda>2$ να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ είναι $f(x)+f(3x)<f(2x)+f(4x)$.

267. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $1821^{x}+2^{x}=2$ **β)** $x+4^{x}=5$ **γ)** $e^{-x}=1-1821\cdot x^{3}$

268. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $2^{x^{2}}-2^{2x}=2x-x^{2}$ **β)** **γ)**

269. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις: **α)** $2^{x}>1-x^{3}$ **β)** $5\cdot 2^{x}+x=4+3^{-x}$

Λογάριθμοι

Ορισμός

Ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ.

Δηλαδή: $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$

Συνέπειες

1. $\log_\alpha \alpha^x = x$ **2.** $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$ **3.** $\log_\alpha 1 = 0$ **4.** $\log_\alpha \alpha = 1$

Ιδιότητες λογαρίθμων

Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\boxed{\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2}$ **2.** $\boxed{\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2}$ **3.** $\boxed{\log_\alpha \theta^k = k\log_\alpha \theta}$

Ασκήσεις

270. Να βρεθούν οι αριθμοί:

α) $\log_{\frac{1}{2}} 128$ **β)** $\log_5 125$ **γ)** $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{81}$

271. Να υπολογίσετε το x ώστε να αληθεύουν οι ισότητες:

α) $\log_x 81 = -4$ **β)** $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ **γ)** $\log_x \frac{1}{27} = -\frac{3}{5}$ **δ)** $\log_{\frac{3}{2}} x = 4$

272. Να υπολογίσετε τη τιμή των παραστάσεων:

α) $A = \log_3 27 - \log_4 32 - \log_4 2 + \log_5 \sqrt{125}$ **β)** $A = \log_4 256 - \log_6 108 - \log_6 2 + \log_{\sqrt{7}} 49$

273. Να αποδείξετε ότι: $\log_2 \sqrt{256\sqrt{64\sqrt{8}}} = \frac{47}{8}$

274. αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $2\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 27 = 1$ **β)** $\frac{\log\sqrt{216} + \log\sqrt{343} - \log\sqrt{125}}{\log 42 - \log 5} = \frac{3}{2}$

275. Αν $f(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$, δείξτε ότι $f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right)$

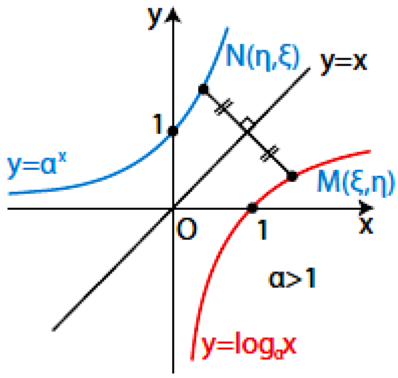
Λογαριθμική συνάρτηση

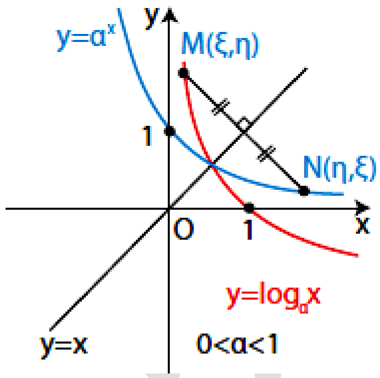
Ορισμός

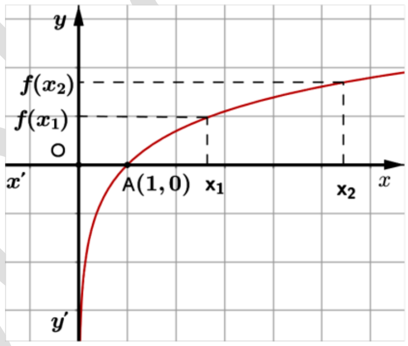
Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ τότε η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_\alpha x$ λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α.

Επειδή $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$, αν το $M(\xi, \eta)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \log_\alpha x$ τότε το $N(\eta, \xi)$ θα είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \alpha^x$ και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, M και N είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$. Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \log_\alpha x$ και $y = \alpha^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.







Αν **α > 1**, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$:

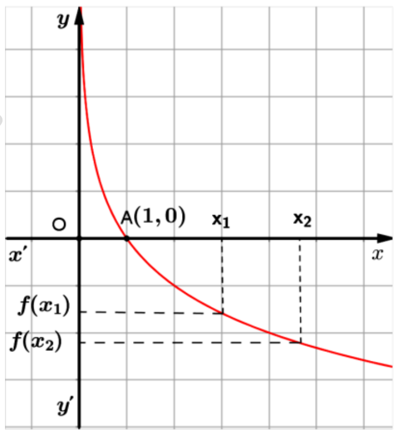
• Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

• Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$.

• Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι
 αν $\mathbf{x_1 < x_2}$ τότε $\mathbf{\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2}$

• Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $\log_\alpha x < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $\log_\alpha x > 0$.

• Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy'.



Αν $\mathbf{0 < \alpha < 1}$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$:

• Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$.

• Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$.

• Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι:
 αν $\mathbf{x_1 < x_2}$ τότε $\mathbf{\log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2}$

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $\log_\alpha x > 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $\log_\alpha x < 0$.

• Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy.

Τέλος, από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι:
 αν $\mathbf{x_1 \neq x_2}$ τότε $\mathbf{\log_\alpha x_1 \neq \log_\alpha x_2}$

και με απαγωγή σε άτοπο έχουμε ότι: αν $\mathbf{\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2}$ τότε $\mathbf{x_1 = x_2}$.

Επομένως ισχύει η ισοδυναμία: $\mathbf{\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2}$

Ασκήσεις

276. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \log\dfrac{x+2}{2-x}$ **β)** $f(x) = 2\log(x^2-4) - 3\log(9-x^2)$

γ) $f(x) = \log(4^x - 5\cdot 2^x + 4)$ **δ)** $f(x) = \dfrac{\log(x^2-8x+15)}{\sqrt{16-x^2}}$

277. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log_2\left(x^2-5x-6\right)=3$ **β)** $\log\left[\log(3x-5)\right]=0$

γ) $\ln\left(9^x-3^x-5\right)=0$ **δ)** $\log_{x-2}\left(2x^2-8x+7\right)=2$

278. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log(2x+3)+\log(6x+2)=2\log(3x+1)$ **β)** $2\log(2x-1)-\log\left(3x-2x^2\right)=\log(4x-3)-\log x$

γ) $\dfrac{1}{3}\log(x-1)=\log x-\log 2$ **δ)** $\dfrac{\log x+3}{\log x}+\dfrac{\log x-2}{\log x-3}=\dfrac{9}{2}$

279. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $5^{3x-1}=2^{x+3}$ **β)** $x^{2-\log x}=\dfrac{10}{\sqrt{x}}$ **γ)** $e\cdot x^{\ln x}=x^2\sqrt{x}$

280. **α)** Να αποδείξετε ότι: $2^{\log x}=x^{\log 2},\ x>0$ **β)** Να λύσετε την εξίσωση $2^{\log x}+x^{\log 2}=16$

281. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log\left(3^{2x-2}+10\right)=1+\log\left(3^{x-1}-1\right)$ **β)** $\log x+\log(\log x)=1$

282. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\log^4 x+8\log^2 x\cdot\log(100x),\ x>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν $f(10)=25$, να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

β) Έστω $\alpha=1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x)=\left(\log^2 x+4\log x\right)^2$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

283. Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $\log 11,\ \log_4\dfrac{1}{2},\ \log_{\frac{1}{2}}3,\ \ln\dfrac{1}{3}$

284. Έστω συνάρτηση $f(x)>0$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: **α)** $\log_{\frac{1}{4}}f(2)$ και $\log_{\frac{1}{4}}f(5)$ **β)** $\ln f(e)$ και $\ln f\left(e^2\right)$

285. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\log\left(x^2-5x+7\right)<0$ **β)** $\log\left(\log\left(x^2-3x+12\right)\right)<0$ **γ)** $\log\left(x^2+1\right)>1-\log x$

286. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\log\left(5\cdot 10^x-6\right)>2x$ **β)** $x^{\ln x}>e$ **γ)** $\ln\left(2e^{2x}-1\right)<-x$

287. Να λύσετε τα συστήματα: **α)** $\begin{cases} x+y=65 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \log x+\log y=3 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

288. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές:

α) $f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$ **β)** $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

289. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left[(k-1)x^2-2(k-3)x+k\right]$.

α) Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β) Αν $k=2$, να αποδείξετε ότι $f(0)f(-2)+1 \geq \log\frac{1}{100^{f(0)}}$.

290. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\frac{x-3}{x^2-2x}+2\log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να αποδείξετε ότι $f(x)=\log\frac{(x-3)(x-2)}{x}$.

γ) Να βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $2kf(6)=\log 2^{k-2}$.

291. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log_{\alpha} x$.

α) Για ποιες τιμές του α είναι $f(x)<0$ για κάθε $x>1$;

Έστω $\alpha=\frac{1}{2}$

β) Να συγκρίνεται τους αριθμούς $f(1821)$ και $f(1453)$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(f(x))$.

292. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\log(x+1)|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να γράψετε την f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

293. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\frac{e^x-3}{e^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

Γενικές ασκήσεις στην Εκθετική και την Λογαριθμική συνάρτηση

294. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=36^x-225^x-3\cdot 4^x+3\cdot 25^x$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της με τον άξονα x΄x.

β) Να αποδείξετε ότι $2\log\frac{f(0)+5}{f(0)+2}+\log\frac{f(0)+3}{f(0)+11}-\log\frac{f(0)+40}{f(0)+77}-\log\frac{f(0)+105}{f(0)+32}=0$

295. α) Να λύσετε την εξίσωση: $3\cdot 4^x+2\cdot 5^x=4\cdot 3^x+5\cdot 2^x$

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3\cdot 4^x+2\cdot 5^x$ και $g(x)=4\cdot 3^x+5\cdot 2^x$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της .

296. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(\log(x-1))$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x+7)-f(x+1)>\log 2$.
δ) Να αποδείξετε ότι $3f(101)+2f(1001)=f(10001)+\log 18$

297. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^x-1)$ και $g(x)=\ln(2e^{1-x}-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο των συναρτήσεων f,g.
β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(-2x) > g(x+1)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $g(1-x) = f(x) + \ln 2$

298. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(x-1) - \log(x^2 - 2x)$ και $g(x) = 1 - \log(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο των συναρτήσεων f,g.

β) Να βρείτε τη τετμημένη του σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων.

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $f(x) = 0$ και **ii.** $g(x) = 0$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(4) - 3g(1) + 4 = \log 30$.

299. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(2x^2 - 4x + 4) - 2\log x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $10^{(2x+1)f(1)} - 5 \cdot 10^{xf(1)} + 10^{f(1)} = f(2)$

δ) Να αποδείξετε ότι $x^{f(1)} = 2^{\log x}$ και να λύσετε την εξίσωση $x^{2f(1)} = 2 + 2^{\log x}$

300. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right) - x$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $f\left(-\dfrac{1}{2}\right), f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(0)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x+1) + 1 + 2x = 0$.

301. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \cdot \log(100x), x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(10, 25)$.

β) Αν $\alpha = 1$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι η f παίρνει τη μορφή: $f(x) = (\log^2 x + 4\log x)^2$

ii. να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

302. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

δ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = (e^x + 5)e^{f(x)}$.

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $g(\eta\mu x + x) = g(x)$

303. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

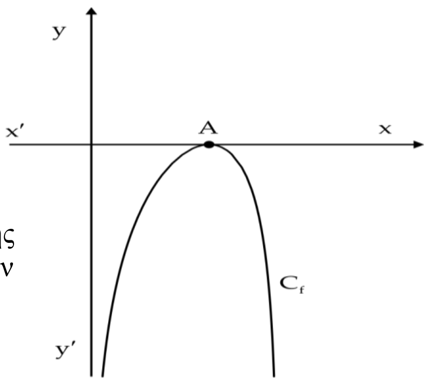
δ) Να λύσετε την εξίσωση $g(x) - g(1) = f(0)$

304. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(-e^{2x}+4e^{x}-3\right)$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να δικαιολογήσετε (αλγεβρικά) γιατί δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f που να βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.



305. Δίνεται η $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^{x}\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\ln\left(e^{x}-1\right)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x$

δ)Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>x+2\ln 2$

ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση
$e^{2x-1}+\ln\left(e^{e^{2x-1}}-1\right)=e^{x}+\ln\left(e^{e^{x}}-1\right)$

306. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-6e^{x}+8\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq \ln 3$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x+\ln 3$

307. Δίνεται η γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x)=\left(\lambda^{3}-\lambda-5\right)^{x}$.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της παραμέτρου λ.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(7\cdot 3^{x+1}+5^{x+3}\right)<f\left(3^{x+4}+5^{x+2}\right)$.

γ) Να βρείτε τη τιμή του λ για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,19)$.

δ) Αν $\lambda=3$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(-x)=2$

308. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ και $g(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε ότι $f^{2}(x)-g^{2}(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $g(\alpha-\beta)=g(\alpha)f(\beta)-g(\beta)f(\alpha)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+2g(x)=1$.

309. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x^{2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f(x+2)$ με την ευθεία $y=2\log 4$.

310. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x+4)-3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

γ) Τη τιμή του $k\in\mathbb{R}$ για την οποία το σημείο $(k,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(3^{x+3}-2^{x}\right)=f\left(23\cdot 3^{x}+2^{x+3}\right)$

311. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\log(3x-14)}{\log(x-4)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=1$.

312. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\ln(x-2)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να απαλλάξετε τον τύπο της f από την απόλυτη τιμή.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^2(x-2)-f(x)-2=0$.

313. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left|\log(x-4)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα χ΄χ.

γ) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες $f(x)<0$.

314. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\lambda^2-4\lambda+4\right)^x$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το λ ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(1,9)$.

γ) Αν $\lambda\in(2,3)$, να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2\right)>f(5x-6)$.

δ) Αν $\lambda=4$, να λύσετε την ανίσωση $2f(x)+3\cdot 9^x-5\cdot 6^x\le 0$.

315. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},e\right)\cup(e,+\infty)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=1$.

316. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{4-\alpha}{\alpha+2}\right)^x$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(\dfrac{6}{7}\right)<f\left(\dfrac{7}{6}\right)$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

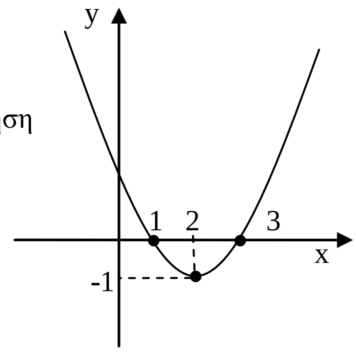
β) Έστω $\alpha=0$.

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x+1)+f(x+2)+f(x+3)=48$

ii. Να αποδείξετε ότι $f(\log x)=\left(\log_2 f(x)\right)^{\log 2}$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $2^{\log x}+x^{\log 2}>16$

Συνδυαστικές Ασκήσεις



317. α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή του διπλανού σχήματος είναι η $f(x)=x^2-4x+3$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+2x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)+4x$ είναι άρτια.

δ) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $h^2(x)-3h(-x)=4$ **ii.** $\sqrt{h(x)}=x+1$

318. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=4x^3-3\etaμω\cdot x^2-συν^2ω\cdot x+2,\ ω\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

α) Να βρείτε το ω για το οποίο το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\etaμω$ να είναι ίσο με 2.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=(2\etaμω)^2$ για τη τιμή του ω προηγούμενου ερωτήματος.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $6\etaμω+2P(1)-11=0$.

319. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log_x 2,\ x>0$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(\etaμx)=-2$.

β) Να αποδείξετε ότι: **i.** $10^{2-f(10)}=50$ **ii.** $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

320. Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4^{-συν^3x-1}}=8^{\frac{5}{3}συν^2x-\frac{1}{3}συνx}$, $x\in(0,2\pi)$.

α) Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης είναι η $ω=\frac{4\pi}{3}$.

β) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $A=\log_2\left(\sqrt[3]{\frac{6ω}{\pi}}\right)-\left(\frac{27ω}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}\log_3\left(\frac{3ω}{4\pi}\right)}+e^{3ω\ln\left(\sqrt[4\pi]{\frac{ω}{\pi}}\right)}$

321. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(2\etaμω)^x$, $ω\in(0,2\pi)$. Να βρείτε τις τιμές του ω για τις οποίες η f είναι:

α) σταθερή στο $\mathbb{R}$ **β)** γνησίως αύξουσα **γ)** γνησίως φθίνουσα

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2)+f(1)=6$.

322. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\etaμ2x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη περίοδο την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα μιας περιόδου.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ στο διάστημα $[0,\pi)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{4}\right)\log 2+\log\left(f\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+3\log\left(f\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)=\log 128$.

ε) Να βρείτε τα $α,β\in\mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $P(x)=x^3-6x^2+αx+β$ έχει παράγοντες τα

$\left(x - f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ και $\left(x - f\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

323. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 2x - 1}{2\eta\mu^2 x - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\log\left(x - f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + \log\left(x + f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \log 3$

324. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \alpha x - \alpha - 1$ που έχει παράγοντα το $x+1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x-1$ είναι 8.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 7$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

γ) Αν $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3\omega + 7\eta\mu^2\omega + 2\eta\mu\omega - 3 = 0$.

325. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x+1$ είναι -18.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 7$ και $\beta = -2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3 2x - 7\eta\mu^2 2x + 7\eta\mu 2x - 2 = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $2 \cdot 8^x - 7 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^x - 2 > 0$.

326. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + 5^{2\lambda-1}x^3 - 2 \cdot 3^{\lambda+\frac{1}{2}}x^2 + 25^{\lambda}x - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν το (x – 1) είναι παράγοντας του $f(x)$, να βρείτε το λ.

β) Για $\lambda = \frac{1}{2}$

i. να δείξετε ότι το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$.

ii. να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

327. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον την ευθεία $y = \log 2$.

γ) Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi)$ την εξίσωση $f(4\sigma\upsilon\nu x) = f(2)$

328. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x - \left(\log\sqrt{x}\right)^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x) = 0$.

δ) Αν για τους θετικούς αριθμούς α,β με $\alpha \neq \beta$ ισχύει ότι $f(\alpha) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 10.000$.

329. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9^x+3^x-12}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=f(1)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^3-7x+6>f(1)$.

330. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+k$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Αν $f\left(\frac{\pi}{6}\right)-\ln\pi=\ln\frac{e}{2}$, να βρείτε το k.

γ) Αν $k=1$, τότε:

i. να λύσετε στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση: $\ln(\eta\mu x)+f(\pi)-2\ln 2=f\left(\frac{\pi}{6}\right)-\ln 3$.

ii. να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\left(e^{f(x)-1}\right)=\eta\mu\left(e^{f(x+\pi)-1}\right)$.

331. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-x-\ln x,\ x>0$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A(1,0)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^x\right)>1-e^{2x-5}-x$.

γ) Αν $0<x<1$ να αποδείξετε ότι $f(x)>0$.

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\theta<\ln\left(\frac{e}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)$.

332. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+3x^2+(\log k-4)x-\log k$, $k>0$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του k, για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

γ) Για $k=1000$ να λύσετε:

i. την ανίσωση $P\left(e^x\right)<0$ **ii.** την εξίσωση $P(\eta\mu x)=-\sigma\upsilon\nu^2 x$

333. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-x-4\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\left(x^2-x\right)$ είναι $2x+4$ τότε :

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-1$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P\left(10^{-x}\right)>10^{-2x}+5$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\log\left(x-\frac{1}{2}P(1)\right)-\log x=\log\frac{3}{P(0)}$.

334. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x+2\alpha-4\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

α) Αν έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, να βρείτε τα α και β .

Αν $\alpha=3$ και $\beta=1$, τότε:

β) να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$

γ) να λύσετε την εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x)=0$

δ) να αποδείξετε ότι $10^{2-\frac{1}{2}\log\left(3P(2)+2P(0)\right)}=25$

335. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \etaμ(\pi-\theta)\cdot x-\etaμ\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\cdot y=1 \\ -3\etaμ(\pi+\theta)\cdot x+2συν(-\omega)\cdot y=8 \end{cases}$, $\theta,\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση, την οποία και να βρείτε.

β) Να βρείτε τα θ,ω για τα οποία το ζεύγος $\left(4,\sqrt{2}\right)$ είναι λύση του συστήματος.

336. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x+y=2μ \\ (μ+1)x+(μ-1)y=2\left(μ^2-1\right) \end{cases}$,όπου $μ\in\mathbb{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $μ\in\mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση .

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0,y_0) .

γ) Να προσδιορίσετε το $μ\in\mathbb{R}$, ώστε η παράσταση $\Pi=2x_0+{y_0}^2$ να γίνει ελάχιστη.

337. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (k+1)x-2y=k+1 \\ kx-ky=1 \end{cases}$,όπου k πραγματικός αριθμός

α) Να βρείτε το k ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση.

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0,y_0) για τις παραπάνω τιμές του k.

γ) Αν $k=1$,

i. να λύσετε την εξίσωση $\etaμ^2\theta+y_0\etaμ\theta-x_0=0$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $21\cdot3^{-x_0t}+x_0\cdot5^{t+3}=3^{t+4}+5^{t+y_0}$

338. Έστω D, D_x, D_y οι ορίζουσες ενός συστήματος 2x2 που έχει μοναδική λύση. Αν $D_x-D_y=4D$ και $D_x+D_y=2D$, να αποδείξετε ότι :

α) το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x_0,y_0)=(3,-1)$.

β) υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει: $\etaμ\theta=\frac{x_0-y_0}{5}$, $συν\theta=\frac{x_0}{5}$.

γ) $\log32-\log(x_0-y_0)-x_0\log2=0$.

339. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(\log x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<1$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\left[f(\lambda)\right]^x$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του λ.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $g\left(x^3+4x\right)>g(x-4)$

340. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να αποδείξετε ότι είναι περιττή.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

341. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+2x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x)=\log P(x)$.

Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(2\sigma\upsilon\nu x) = 0$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(7) - f(2) = f(3) + \log 9$.

342. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + \alpha x + \beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

α) Χωρίς να υπολογίσετε τα α,β, να αποδείξετε ότι $|\alpha| + |\beta| \geq 3$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3 x - 5\eta\mu^2 x + 4\eta\mu x = 1$

ε) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - f(0)y = \sqrt{2} \\ x + \lambda y = \sqrt{2} + f(1) \end{cases}$.

i. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0).

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει: $\eta\mu\theta = x_0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = y_0$.

343. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (1+\eta\mu\varphi)x^2 - (1+\eta\mu^2\varphi)x - (1-\eta\mu\varphi)\eta\mu\varphi$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\varphi \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο είναι 1ου βαθμού.

β) Αν το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού και x_1, x_2 είναι ρίζες του, να αποδείξετε ότι: $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 1$.

γ) Αν $Q(x) = \eta\mu\varphi \cdot x^3 + \alpha x^2 + \beta x$, να βρείτε τα α, β, φ για τα οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

344. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(e^x - 3)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1821)$ και $f(2015)$.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y = \ln 10$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^2 x + \ln\left(e^{\eta\mu^2 x + 3} - 3\right) = 1 + \ln\left(e^4 - 3\right)$

345. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{\ln\alpha - \ln 3}{\ln\beta - \ln\alpha}\right)^x$ με $3 < \alpha < \beta$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\ln\alpha$ και $\ln\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 < 3\beta$.

γ) Αν $\alpha = 6$ και $\beta = 24$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα: $2 \cdot f\left(\dfrac{\kappa+\lambda}{2}\right) \leq f(\kappa) + f(\lambda)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(-\eta\mu^2 x) + f(-\sigma\upsilon\nu^2 x) = 3$.

346. Έστω x, y θετικοί αριθμοί, με $x \neq 1$.

α) Δείξτε ότι ισχύει: $\ln y \cdot \log x = \log y \cdot \ln x$

β) Αν ισχύει η ισότητα $\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 4\frac{\log y}{\log x} + 4 = 0$ βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x, y.

γ) Αν είναι $y = x^2$ και το y είναι λύση της εξίσωσης $e^{2y^2-3y+1} = (2004)^0$, να βρείτε τους αριθμούς x, y.

δ) Αν για το πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 4x + 4$ ισχύει $P(\ln x) \le 1$, να δείξετε ότι $y \in \left[e^2, e^6\right]$

(ΟΕΦΕ 2004)

347. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln\left(2e^{2x+1} + e^{x+1}\right)$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να δειχθεί ότι το γράφημά της τέμνει τον yy' στο σημείο $A(0, 1+\ln 3)$

β) Να λυθεί η εξίσωση f (x) = 1

γ) Να βρεθούν τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία y = 1.

(ΟΕΦΕ 2005)

348. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \alpha - \beta)$,όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Α. Αν $\ln 6 + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln 5 = \ln \pi$,τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\left(e^{f(x)}\right)\sigma\upsilon\nu\left(e^{f(x)}\right) = \frac{1}{2}$.

Β. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A(1,0), τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha - \beta = 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $16 \cdot 2^{f(x)} < 2^{\ln\left(2e^4\right)}$

(ΟΕΦΕ 2008)

349. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x'x.

β) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x > 0$ και $x \ne e^{\frac{1}{2}}, x \ne e^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3$ για κάθε $x > 0$ και $x \ne e^{\frac{1}{2}}, x \ne e^{-\frac{1}{2}}$.

δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$A = \ln f\left(e^{1000}\right) + \ln f\left(e^{1001}\right) + \ln f\left(e^{1002}\right) + \ln f\left(e^{1003}\right) + \ln f\left(e^{1004}\right)$

(ΟΕΦΕ 2009)

350. Α. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$, για $x > 1$.

i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$L = \varphi(2) \cdot \varphi(3) \cdot \varphi(4) \cdot \ldots \cdot \varphi(63) + 2004$

ii. Να λυθεί η ανίσωση $\varphi(x) > \varphi(x^2)$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(e^{2x} - (e+1)e^x + e\right)$.

i. Για ποιες τιμές του x με x > 0 ορίζεται η συνάρτηση f.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(\ln x) = \ln(x-1)$ για κάθε $x > e$

(ΟΕΦΕ 2010)

351. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)$

α) Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $A=f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)-f(-x)<-2\ln 3$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)}+3=4e^{f(x)}$.

(ΟΕΦΕ 2011)

352. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\frac{\ln x}{\ln 2}$ και $f(x)=\frac{1}{\ln\left(2^x-3\right)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να συγκρίνετε τους αριθμούς $g(3)$, 2.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Αν $\kappa>4$ να λύσετε την ανίσωση $f(\log_2\kappa)<\frac{1}{2}$.

δ) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left(-x^3-7x^2+6\right):(x+1)$ είναι το πολυώνυμο

$\upsilon(x)=\left(f(\beta)-1\right)x+g(\alpha)+g\left(\alpha^2\right)+g\left(\alpha^3\right)+...+g\left(\alpha^{20}\right)-\frac{210}{\ln 2}$ να δείξετε ότι $\alpha+3=e^{\beta\ln 2}$ όπου α ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και β ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(ΟΕΦΕ 2012)

353. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}\eta\mu(\pi+\theta)x+\sigma\upsilon\nu(-\theta)y=1\\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)x+\sigma\upsilon\nu(\theta-\pi)y=1\end{cases}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta,\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(10^\alpha-3\right)\sigma\upsilon\nu x-4,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το 3.

ii) Για α = 1, να βρείτε τις τιμές του $\theta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες xy = f (θ) όπου (x, y) είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

(ΟΕΦΕ 2013)

354. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\left[\ln\left(e^x-e^2\right)\right]^2-3}{\ln\left(e^x-e^2\right)-2}$.

α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\ln\left(2e^2\right)$, $\ln\left(e^3+e^2\right)$, 2 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{y^2-3}{y-2}\geq 6$

γ) Έστω $x_0=\ln\left(e^3+e^2\right)$:

i) Να αποδείξετε ότι $f(x_0)=6$

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in\left(\ln\left(2e^2\right),+\infty\right)$. Είναι το $f(x_0)$ ελάχιστο της συνάρτησης;

(ΟΕΦΕ 2013)

355. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\beta x\right)$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και $0<\beta\leq 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(0,-2), Β(π,-1).

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

Αν $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)$

β) i) Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της f και την περίοδό της.

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα [0,6π] και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο ίδιο διάστημα.

γ) Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $(\Sigma)\ \begin{cases}\lambda f(0)x+f(2014\pi)y=4\lambda\\ \lambda f(-\pi)x+\lambda f(2\pi)y=0\end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ $(\lambda\in\mathbb{R})$ ώστε το παραπάνω σύστημα να έχει άπειρες λύσεις καθώς και τη μορφή των απείρων λύσεων.

(ΟΕΦΕ 2014)

356. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-2^x}{4\cdot 2^x-1}\right)$

α) Να αποδείξετε ορισμού της f είναι το διάστημα A = (-2,2).

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Να βρείτε (αν υπάρχει) την τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=x\ln 2-\ln 3$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $-\ln^2(e^2)\cdot f(x)>4f(-x)+\ln^2|x|-\ln x^2-3$.

(ΟΕΦΕ 2014)

357. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, για την οποία ισχύουν:

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης της f(x) δια x +2 είναι 24.
- Η C_f διέρχεται από το σημείο A(0,8).
- Η f έχει παράγοντα το x - 1.

α) Να δείξετε ότι: α = 1, β = -10 και γ = 8.

β) i) Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 0.

ii) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα x'x.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x+4}{f(x)}\le\dfrac{2}{f(x)+f(-x)-18}$.

(ΟΕΦΕ 2015)

358. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=2^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ με $x\in\mathbb{R}$ και

$h(x)=\ln\dfrac{3}{x}+\ln\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)+\ln\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$ με x > 0.

α) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln(f(\ln x))$.

i) Να υπολογίσετε το $f(\ln x)$.

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\ln(f(\ln x))$.

β) Να δείξετε ότι $h(x)=\ln\dfrac{3}{2}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση g(x) = h(x) με x >1.

δ) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}$ και να ισχύει $\eta\mu\theta=\dfrac{f(1)\ln^2 x-2f(2)\ln x}{6f(1)}$

(ΟΕΦΕ 2015)

359. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{2x}-(e+1)e^x+e}{e^{x+1}-e}\right)$ και $g(x)=e^{2x-1}-4e^{x-1}+3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

β) Να λυθεί η εξίσωση $g(x)=e^{\ln\frac{5+3e}{e}}$

γ) Βρείτε τις τιμές του x ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ να μην είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(x)} \geq g(x) + \frac{6-4e}{e}$.

(ΟΕΦΕ 2016)